Substitutionselastizität

1 Grenzrate der Substitution

Produktionsfunktion $Q = Q(x_1, \ldots, x_n)$

Isoquante: Menge aller Inputkombinationen, die zu einem festen Output Q führen. Die zum Outputniveau $\overline{Q}$ gehörige Isoquante $I(\overline{Q})$ ist also

$$I(\overline{Q}) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ : Q(x_1, \ldots, x_n) = \overline{Q}\}. \tag{1}$$

Beschränken uns im Folgenden auf den Fall zweier Produktionsfaktoren L (Arbeit) und K (Kapital). Zum Beispiel ist für die Cobb–Douglas Produktionsfunktion

$$Q(L, K) = AL^\alpha K^\beta, \quad A > 0, \tag{2}$$

die Isoquante gegeben durch

$$I(\overline{Q}) = \{(L, K) \in \mathbb{R}^2_+ : AL^\alpha K^\beta = \overline{Q}\}. \tag{3}$$

Graphisch können die Isoquanten in der (L, K)–Ebene dargestellt werden. Aus (2) folgt für ein fixes Outputniveau $\overline{Q}$ auf der Isoquante

$$K(L) = A^{-1/\beta} \overline{Q}^{1/\beta} L^{-\alpha/\beta}, \tag{4}$$

vergleiche Abbildung 1.

Grenzrate der Substitution (GRS): (Steigung der Isoquante im (L, K)–Diagramm) Wenn wir den Einsatz von L ein wenig erhöhen, wie stark müssen wir dann K senken, um den Output konstant zu halten, d.h. auf der gegenwärtigen Isoquante zu verbleiben? Das entsprechende Verhältnis ist die *Grenzrate der Substitution* (GRS) R_{KL} im Punkt (L, K). Die Isoquante definiert K mittels $Q(L, K) - \overline{Q} = 0$ als implizite Funktion von L, und mittels impliziter Differentiation erhalten wir die Grenzrate der Substitution im Punkt (L, K),

$$Q(K, L) = \overline{Q} = \text{const.} \Rightarrow R_{KL} = \left.\frac{dK}{dL}\right|_{Q(L,K)=\overline{Q}} = -\frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K} = -\frac{Q_L(L, K)}{Q_K(L, K)}, \tag{5}$$

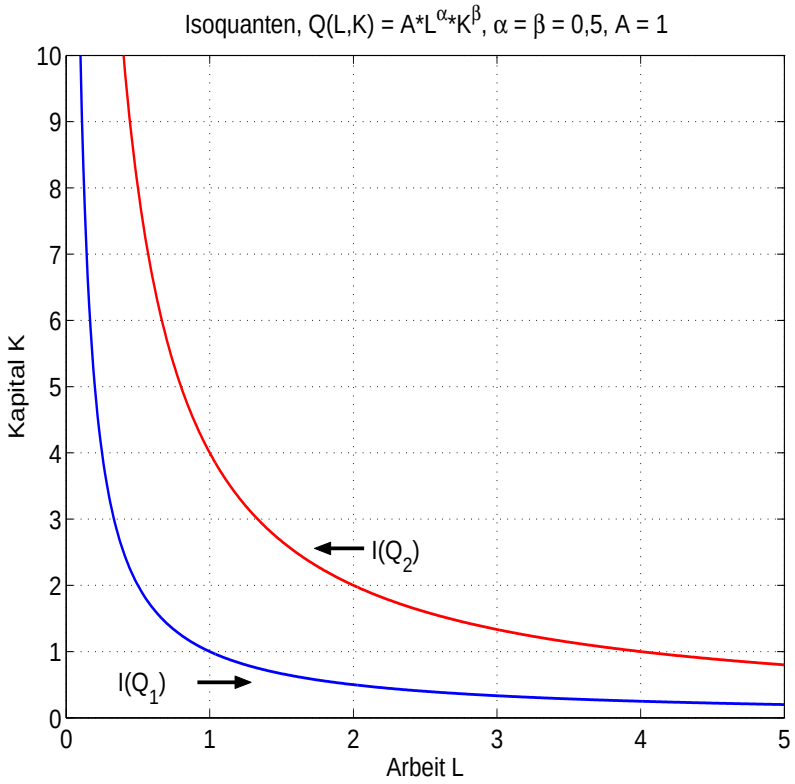

Abbildung 1: Zwei Isoquanten für die Cobb–Douglas Produktionsfunktion (2) mit $A = 1$ und $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Es gilt $Q_2 > Q_1$, da die höher gelegene Isoquante mit höherem Faktoreinsatz (und damit höherem Output) verbunden ist. (Hier ist $Q_1 = 1$ und $Q_2 = 2$.)

d.h. die Grenzrate der Substitution ist gleich dem (negativen) Verhältnis der *Grenzproduktivitäten* $\partial Q/\partial L$ und $\partial Q/\partial K$: Ist z.B. $\partial Q/\partial L$ groß, so wächst Q stark, wenn L erhöht wird, daher muss K relativ stark reduziert werden, um den Output konstant zu halten.

Beispiel: Cobb–Douglas Produktionsfunktion $Q(L,K) = AL^\alpha K^\beta$, mit

$$Q_L(L,K) = \frac{\partial Q(L,k)}{\partial L} = \alpha A L^{\alpha-1} K^\beta \tag{6}$$

$$Q_K(L,K) = \frac{\partial Q(L,K)}{\partial K} = \beta A L^\alpha K^{\beta-1}, \tag{7}$$

$$R_{KL} = \left.\frac{dK}{dL}\right|_{Q=\text{const.}} = -\frac{\partial Q/\partial L}{\partial Q/\partial K} = -\frac{\alpha A L^{\alpha-1} K^\beta}{\beta A L^\alpha K^{\beta-1}} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{K}{L} = -\frac{\alpha}{\beta}k, \tag{8}$$

mit

$$k = \frac{K}{L} = \text{Faktoreinsatzverhältnis (Kapitalintensität)}. \tag{9}$$

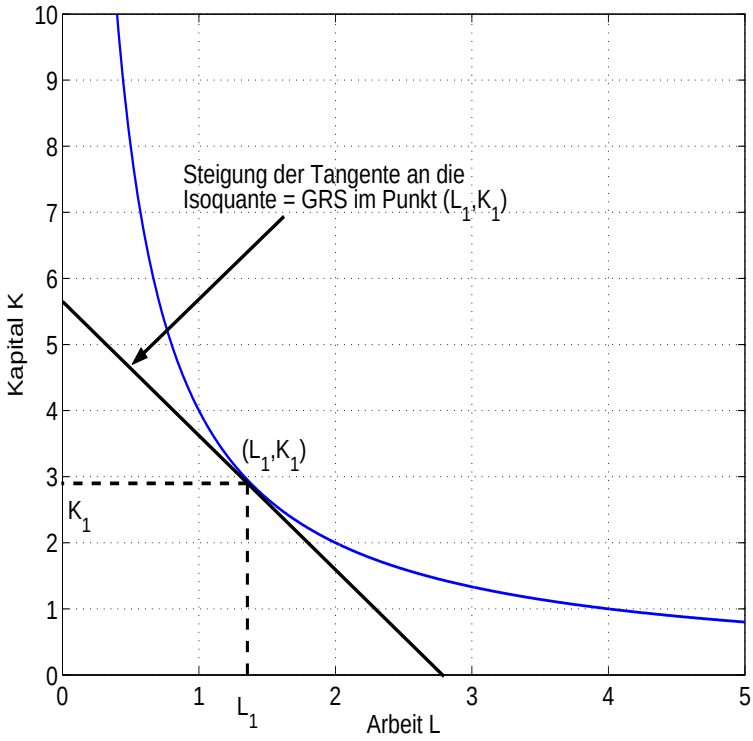

Abbildung 2: Grenzrate der Substitution.

Offensichtlich hängt für die Cobb–Douglas Produktionsfunktion die Grenzrate der Substitution nur vom Faktoreinsatzverhältnis k ab, d.h. *die Grenzrate der Substitution (GRS) ist konstant entlang einer Halbgeraden durch den Ursprung*, denn es gilt für $t > 0$ für die Grenzrate der Substitution im Punkt (L, K)

$$GRS(L,K) = -\frac{Q_L(L,K)}{Q_K(L,K)} = -\frac{Q_L(t\cdot L, t\cdot K)}{Q_K(t\cdot L, t\cdot K)} = GRS(t\cdot L, t\cdot K). \tag{10}$$

Gleichung (10) gilt allgemein für homogene Produktionsfunktionen, denn ist $Q(L,K)$ homogen vom Grad k, so sind die partiellen Ableitungen $Q_L(L,K)$ und $Q_K(L,K)$ homogen vom Grad $k-1$ (Eigenschaft 2 homogener Funkionen), und es gilt für $t > 0$

$$-\frac{Q_L(t\cdot L, t\cdot K)}{Q_K(t\cdot L, t\cdot K)} = -\frac{t^{k-1}Q_L(L,K)}{t^{k-1}Q_K(L,K)} = -\frac{Q_L(L,K)}{Q_K(L,K)}, \tag{11}$$

also (10). Das heißt, für die Isoquanten einer homogenen Produktionsfunktion in Abbildung 3 ist die GRS im Punkt (L_1, K_1) gleich der GRS im Punkt (L_2, K_2), und die GRS im Punkt (L_3, K_3) ist gleich der GRS im Punkt (L_4, K_4).

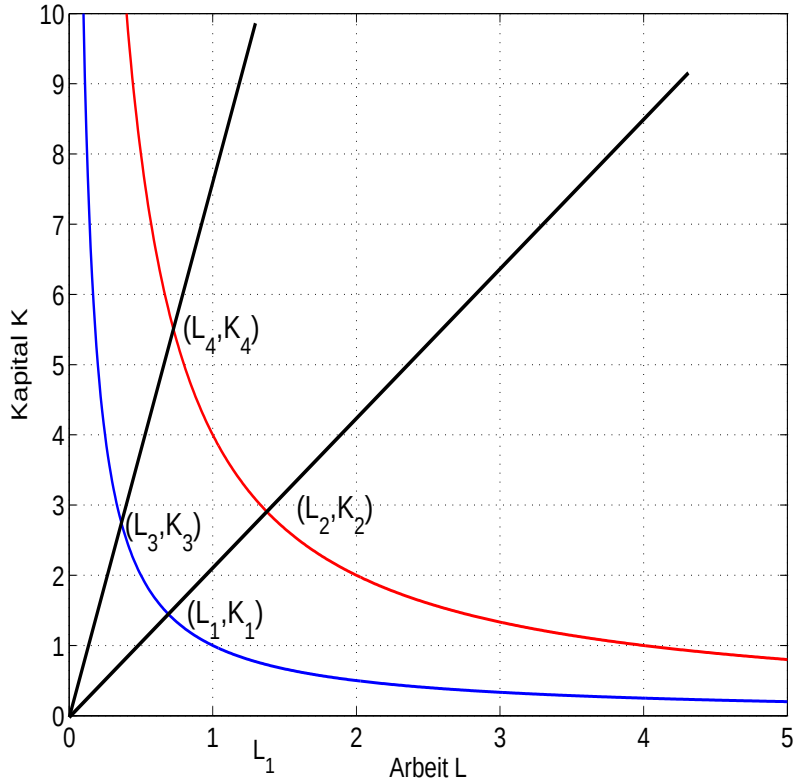

Abbildung 3: Für homogene Produktionsfunktionen ist die Grenzrate der Substitution konstant entlang eines Strahls durch den Ursprung.

2 Substitutionselastizität

Man möchte nun eine Produktionsfunktion hinsichtlich der Leichtigkeit charakterisieren, mit der sich ein Produktionsfaktor durch den anderen substituieren lässt. Je stärker die Krümmung der Isoquante ist, desto geringer ist die Substituierbarkeit. Gesucht ist also ein Maß für die Krümmung der Isoquante.

Die Grenzrate der Substitution (GRS) misst die Steigung der Isoquante in einem bestimmten Punkt.[1] Die GRS ist daher schlecht geeignet, die Gestalt der Isoquanten

[1] Typischerweise nimmt der Absolutwert von R_{KL} mit zunehmendem L (und damit abnehmendem K) ab, da (unter der typischen Annahme sinkender Grenzerträge, d.h. $\partial^2 Q/\partial L^2 < 0$ und $\partial^2 Q/\partial K^2 < 0$) die Grenzproduktivität von L mit steigendem L abnimmt und jene von K zunimmt. Wenn dann die Kreuzableitung $\partial^2 Q/\partial L \partial K$ nicht negativ ist, dann ist (hinreichende Bedingung) die Isoquante konvex zum Ursprung wie in den Abbildungen 1–3. Um das zu sehen, leiten wir unter Verwendung der multivariaten Kettenregel und (5) noch ein zweites Mal entlang der Isoquante (auf der K als implizite

einer Produktionsfunktion insgesamt zu charakterisieren; ferner hängt ihr Wert von den verwendeten Einheiten ab.

Um ein von den verwendeten Einheiten unabhängiges Maß zu erhalten, wird in ökonomischen Analysen häufig die Elastizität verwendet. Die Elastizität von $y = f(x)$ bezüglich x misst die *prozentuale Veränderung* von y im Verhältnis zur prozentualen Veränderung von x. Dieses Verhältnis ist $(\Delta y/y)/(\Delta x/x) = (\Delta y/\Delta x)(x/y)$. Mit $\Delta x \to 0$ erhält man die *Punktelastizität* von y bezüglich x, $\varepsilon_{y,x}$,

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y} = \frac{d\ln y}{d\ln x}. \tag{12}$$

Um die logarithmische Darstellung in (12) zu sehen, wendet man mehrere Male die Kettenregel und die Regel $(\ln x)' = 1/x$ an. Zunächst ist

$$\frac{d\ln y}{d\ln x} = \frac{d\ln y}{dy}\frac{dy}{d\ln x} = \frac{1}{y}\frac{dy}{d\ln x}. \tag{13}$$

Weiter ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\ln x}\frac{d\ln x}{dx} = \frac{dy}{d\ln x}\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{d\ln x} = \frac{dy}{dx}x. \tag{14}$$

Substituiert man das Ergebnis in (14) in (13), so ergibt sich schließlich[2]

$$\frac{d\ln y}{d\ln x} = \frac{dy}{dx}\frac{x}{y}. \tag{15}$$

Funktion von L definiert ist, d.h. $K = K(L)$) ab,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2K}{dL^2}\right|_{Q=\text{const.}} &= -\frac{d}{dL}\left(\frac{Q_L(L,K(L))}{Q_K(L,K(L))}\right) \\
&= -\frac{\left(Q_{LL} + Q_{KL}\left.\frac{dK}{dL}\right|_{Q=\text{const.}}\right)Q_K - \left(Q_{KL} + Q_{KK}\left.\frac{dK}{dL}\right|_{Q=\text{const.}}\right)Q_L}{Q_K^2} \\
&\overset{(5)}{=} \frac{-Q_{LL}Q_K + Q_{KL}Q_L + Q_{KL}Q_L - Q_{KK}Q_L^2/Q_K}{Q_K^2} \\
&= \frac{-Q_{LL}Q_K^2 + 2Q_{KL}Q_LQ_K - Q_{KK}Q_L^2}{Q_K^2}.
\end{aligned}$$

Dies ist positiv (und die Isoquante also konvex zum Ursprung), wenn $2Q_{KL}Q_LQ_K > Q_{LL}Q_K^2 + Q_{KK}Q_L^2$, also auf jeden Fall mit $Q_L, Q_K > 0$, $Q_{LL}, Q_{KK} < 0$, und $Q_{KL} \geq 0$.

[2]In diesem Zusammenhang können wir uns auch an unser Ergebnis erinnern, dass für kleine prozentuale Veränderungen die Differenz der Logarithmen die prozentuale Veränderung recht gut approximiert.

Die Substitutionselastizität σ_{KL} als Maß für die Leichtigkeit der Substitution bzw. die Krümmung der Isoquante ist nun die Elastizität des Faktoreinsatzverhältnisses bezüglich der Grenzrate der Substitution auf der Isoquante:

$$\sigma_{KL} = \frac{d(K/L)}{d(Q_L/Q_K)} \frac{Q_L/Q_K}{K/L} = \frac{d\ln(K/L)}{d\ln(Q_L/Q_K)}. \tag{16}$$

Es ist $\sigma_{KL} = \sigma_{LK}$, d.h. die Substitutionselastizität ist symmetrisch.

Wenn mit einer kleinen relativen Veränderung der Steigung der Isoquante eine große relative Veränderung des Faktoreinsatzverhältnisses verbunden ist, ist die Krümmung relativ schwach und σ_{KL} ist groß. *Je größer σ_{KL}, desto besser sind die Faktoren substituierbar, desto schwächer ist die Krümmung der Isoquante.*

Die Substitutionselastizität (und ihre empirische Ermittlung) spielt eine gewisse Rolle in der Beschäftigungs– und Verteilungstheorie. Um dies zu illustrieren, betrachten wir eine andere Interpretation dieser Größe. Betrachte zu diesem Zweck ein kostenminimierendes Unternehmen. Minimiert werden die Kosten $C = wL + rK$ unter der Nebenbedingung, einen Output von Q_0 zu erzielen. Die Lagrange–Funktion Z ist

$$Z = wL + rK - \lambda(Q(L,K) - Q_0), \tag{17}$$

und die Bedingungen erster Ordnung für ein Kostenminimum sind

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = w - \lambda \frac{\partial Q(L,K)}{\partial L} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = r - \lambda \frac{\partial Q(L,K)}{\partial K} = 0. \tag{19}$$

Teilt man Gleichung (18) durch Gleichung (19), so ergibt sich die Bedingung

$$\frac{w}{r} = \frac{Q_L(L,K)}{Q_K(L,K)}, \tag{20}$$

d.h. im Optimum ist das Faktorpreisverhältnis gleich dem Verhältnis der Grenzproduktivitäten bzw. der negativen Grenzrate der Substitution. Für eine kostenminimierende Firma ist daher auch

$$\sigma_{KL} = \frac{d(K/L)}{d(Q_L/Q_K)} \frac{Q_L/Q_K}{K/L} = \frac{d(K/L)}{d(w/r)} \frac{w/r}{K/L}, \tag{21}$$

d.h. die Substitutionselastizität ist die Elastizität des Faktoreinsatzverhältnisses bezüglich des Faktorpreisverhältnisses.

Im Allgemeinen müssen wir bei der Berechnung der Ableitungen in (16) explizit berücksichtigen (mittels Kettenregel), dass K auf der Isoquante eine durch $Q(L,K) - \overline{Q} = 0$ implizit definierte Funktion von L ist. Für homogene Produktionsfunktionen ist die Berechnung aber einfacher, da sich die Grenzrate der Substitution als Funktion allein des Faktoreinsatzverhältnisses schreiben lässt.

Beispiel: Für die Cobb–Douglas Funktion ist

$$\frac{Q_L}{Q_K} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{K}{L}, \tag{22}$$

also

$$\ln\frac{Q_L}{Q_K} = \ln\frac{\alpha}{\beta} + \ln\frac{K}{L}, \tag{23}$$

und somit

$$\sigma_{KL} = \frac{d\ln(K/L)}{d\ln(Q_L/Q_K)} = 1. \tag{24}$$

Für die Cobb–Douglas Produktionsfunktion ist σ_{KL} also stets 1. Das ist in vielen Anwendungen zu unflexibel. Wir suchen eine Funktionsform, die einerseits flexibler ist, es andererseits aber immer noch erlaubt, die Krümmung mit Hilfe eines einzigen Parameters zu beschreiben. Eine solche wird durch die CES Produktionsfunktion gegeben (CES = **c**onstant **e**lasticity of **s**ubstitution):

$$Q(L,K) = [\delta L^{-\rho} + (1-\delta)K^{-\rho}]^{-1/\rho}, \quad \delta \in (0,1), \quad -1 \le \rho \neq 0. \tag{25}$$

Die in (25) gegebene CES Produktionsfunktion ist homogen vom Grade 1.[3] Die Grenzproduktivitäten sind

$$Q_L = \frac{-1}{\rho}\delta(-\rho)L^{-(\rho+1)}[\delta L^{-\rho} + (1-\delta)K^{-\rho}]^{-1/\rho-1} = \delta L^{-(1+\rho)}Q^{1+\rho} \tag{26}$$

$$Q_K = (1-\delta)K^{-(1+\rho)}Q^{1+\rho}. \tag{27}$$

Die Grenzrate der Substitution ist

$$-\frac{Q_L}{Q_K} = -\frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho}, \tag{28}$$

[3]Der Homogenitätsgrad lässt sich aber leicht regulieren durch Einführung eines Parameters m: $Q(L,K) = [\delta L^{-\rho} + (1-\delta)K^{-\rho}]^{-m/\rho}$ ist homogen vom Grade m.

also

$$\ln \frac{K}{L} = \frac{1}{1+\rho} \ln \frac{Q_L}{Q_K} - \frac{1}{1+\rho} \ln \frac{\delta}{1-\delta} \tag{29}$$

und

$$\sigma_{KL} = \frac{d \ln(K/L)}{d \ln(Q_L/Q_K)} = \frac{1}{1+\rho}. \tag{30}$$

Im Grenzfall $\rho \to 0$ erhalten wir die Substitutionselastizität der Cobb–Douglas Funktion. Das legt die Vermutung nahe, dass

$$\lim_{\rho \to 0} \text{CES} = \text{Cobb–Douglas}. \tag{31}$$

Diese Vermutung kann mit Hilfe der L'Hospitalschen Regel bestätigt werden. Es ist

$$Q(L,K) = \exp\left\{ -\frac{\ln\left[\delta L^{-\rho} + (1-\delta)K^{-\rho}\right]}{\rho} \right\}. \tag{32}$$

Betrachte den Grenzwert des Ausdrucks in der Exponentialfunktion. Mit $\rho \to 0$ gehen wegen $\ln 1 = 0$ Zähler und Nenner gegen 0. Die L'Hospitalsche Regel liefert dann

$$\lim_{\rho \to 0} -\frac{\ln\left[\delta L^{-\rho} + (1-\delta)K^{-\rho}\right]}{\rho} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\delta (\ln L) L^{-\rho} + (1-\delta)(\ln K) K^{-\rho}}{\delta L^{-\rho} + (1-\delta)K^{-\rho}} \tag{33}$$

$$= \delta \ln L + (1-\delta) \ln K, \tag{34}$$

also

$$\lim_{\rho \to 0} \text{CES} = \exp\left\{\delta \ln L + (1-\delta) \ln K\right\} = L^{\delta} K^{1-\delta}, \tag{35}$$

eine Cobb–Douglas Funktion mit Homogenitätsgrad 1.

Da die Substitutionselastizität der CES Funktion konstant ist und durch einen einzigen Parameter (ρ) dargestellt wird, eignet sie sich gut, um den Zusammenhang zwischen der Krümmung der Isoquante und der Substitutionselastizität zu illustrieren.

Für den Minimalwert $\rho = -1$ ist $\sigma_{KL} = \infty$, das ist der Fall perfekter Substituierbarkeit. Die Isoquanten sind dann linear, d.h. sie haben keine Krümmung. Für $\rho = -1$ ist die CES Produktionsfunktion (25) nämlich

$$Q(L,K) = \delta L + (1-\delta)K, \tag{36}$$

und die Isoquante zum Outputnuveau $\overline{Q}$ ist

$$K = \frac{1}{1-\delta}\overline{Q} - \frac{\delta}{1-\delta}L, \tag{37}$$

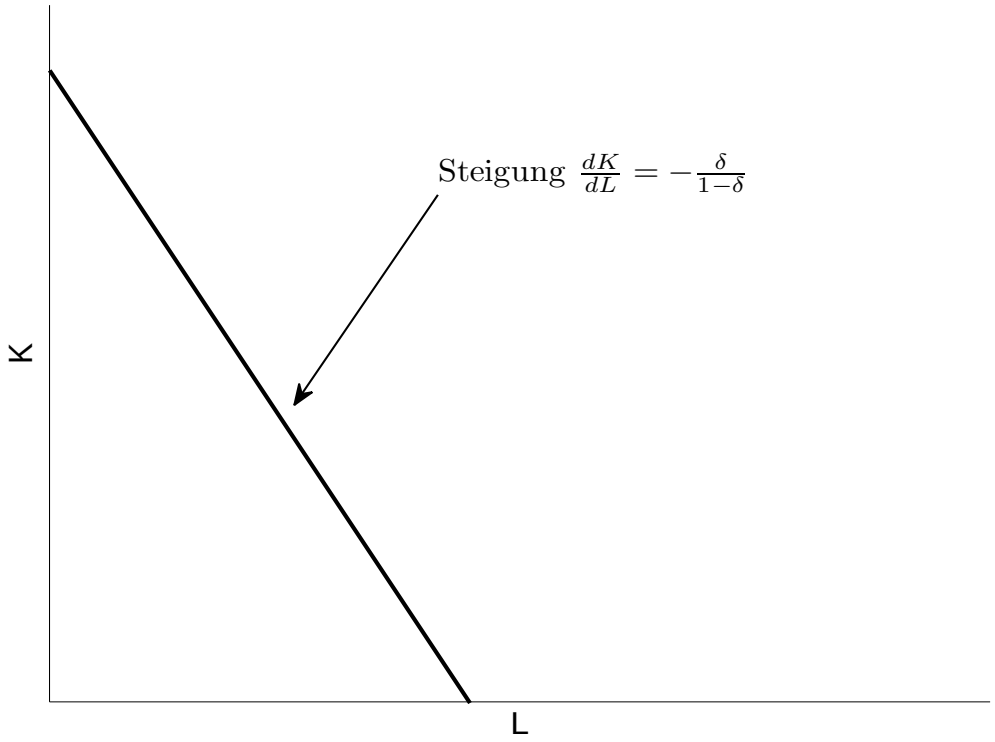

Abbildung 4: Isoquante für eine CES Funktion mit $\rho = -1$, $\sigma_{KL} = \infty$; die Isoquanten werden durch Gleichung (37) beschrieben.

vgl. Abbildung 4. Vollständige Substitution ist möglich.

Der andere Extremfall $\rho \to \infty$ und somit $\sigma_{KL} \to 0$ (überhaupt keine Substituierbarkeit) lässt sich am einfachsten anhand der Grenzrate der Substitution (28) darstellen. Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{\rho\to\infty} \text{GRS} &= \lim_{\rho\to\infty} -\frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\rho} \\ &= \begin{cases} -\infty & K > L \\ 0 & L > K, \end{cases} \end{aligned} \tag{38}$$

vgl. Abbildung 5. Aus (38) folgt, dass die Isoquante für $K > L$ parallel zur y–Achse verläuft und für $L > K$ parallel zur x–Achse. Jeder weitere Einsatz nur eines Faktors jenseits eines fixen Faktoreinsatzverhältnisses führt zu keiner Steigerung der Produktion. Die Isoquanten weisen maximale Krümmung auf.

Für $-1 < \rho < \infty$ hat man eine Krümmung, die zwischen den Extremfällen $\rho = -1$

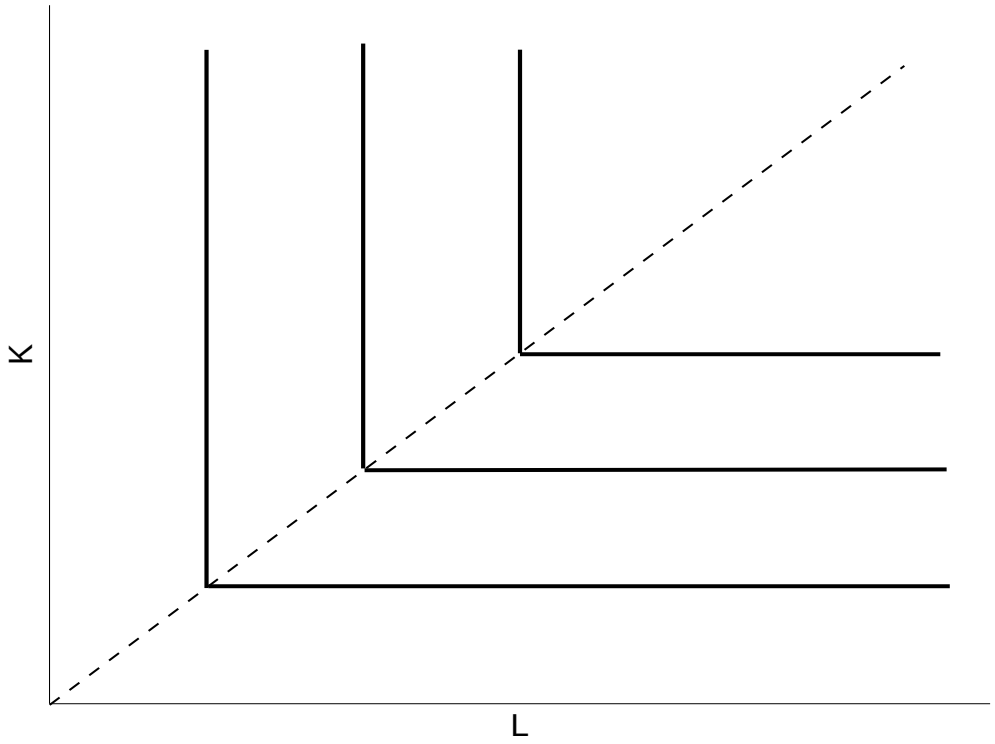

Abbildung 5: Isoquanten für eine CES Funktion mit $\sigma_{KL} = 0$ ($\rho = \infty$). Die Isoquante wird durch (38) beschrieben.

und $\rho = \infty$ liegt und wie sie etwa für die Cobb–Douglas Funktion ($\sigma_{KL} = 1$) in den Abbildungen 1–3 gezeigt wird.

2.1 Allgemeine Formel für die Substitutionselastizität

Die allgemeine Formel für die Substitutionselastizität folgt mit Hilfe der multivariaten Kettenregel und der folgenden Regel für die Differentiation der Umkehrfunktion:

Differentiation der Umkehrfunktion:

Sei g die Umkehrfunktion einer streng monotonen Funktion f. Ist f in y_0 differenzierbar mit $f'(y_0) \neq 0$, so ist g in $x_0 = f(y_0)$ differenzierbar mit

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(g(x_0))}. \tag{39}$$

Diese Formel macht man sich anhand der Identität

$$f(g(x)) = x \tag{40}$$

klar, denn dann folgt aus der Kettenregel (Differenzierbarkeit vorausgesetzt)

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) = 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}. \tag{41}$$

Besonders suggestiv lässt sich (39) auch in der Form

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \tag{42}$$

schreiben, wenn $y = f(x)$ mit Umkehrfunktion $x = g(y)$.

Beispiel: Sei

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}. \tag{43}$$

Es ist z.B. $f(2) = 1/3$ und somit für die Umkehrfunktion $g(1/3) = 2$. Wegen $f'(x) = 2/(1+x)^2$ ist $f'(2) = 2/9$. Also ist

$$g'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{f'(g(1/3))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{9}{2}. \tag{44}$$

In diesem Falle lässt sich das Ergebnis leicht direkt bestätigen, denn $g(y) = (1+y)/(1-y)$ und $g'(y) = 2/(1-y)^2$, also $g'(1/3) = 2/(2/3)^2 = 9/2$.

Um einen praktikablen Ausdruck für (16) zu erhalten, berechnen wir zunächst die involvierte Ableitung via (siehe (42))

$$\frac{d(K/L)}{d(Q_L/Q_K)} = \frac{1}{\left(\frac{d(Q_L/Q_K)}{d(K/L)}\right)}. \tag{45}$$

Auf der Isoquante gilt $K = K(L)$, daher ist $K/L = K(L)/L$ eine Funktion von L, und aus der (univariaten) Kettenregel folgt

$$\frac{d(Q_L/Q_K)}{d(K/L)} = \frac{d(Q_L/Q_K)}{dL}\frac{dL}{d(K/L)}. \tag{46}$$

Der erste Produktterm auf der rechten Seite von (46) ist mit der multivariaten Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{d(Q_L/Q_K)}{dL} &= \frac{d}{dL}\left(\frac{Q_L(L,K(L))}{Q_K(L,K(L))}\right) = \frac{\left(Q_{LL} + Q_{KL}\frac{dK}{dL}\right)Q_K - \left(Q_{KL} + Q_{KK}\frac{dK}{dL}\right)Q_L}{Q_K^2} \\
&= \frac{Q_{LL}Q_K - Q_{KL}Q_L - Q_{KL}Q_L + Q_{KK}Q_L^2/Q_K}{Q_K^2} \\
&= \frac{Q_{LL}Q_K^2 - 2Q_{KL}Q_LQ_K + Q_{KK}Q_L^2}{Q_K^3},
\end{aligned}$$

da auf der Isoquante $dK/dL = -Q_L/Q_K$. Für den zweiten Produktterm verwenden wir wieder die Regel für die Inverse Funktion, d.h.,

$$\frac{dL}{d(K/L)} = \frac{1}{\left(\frac{d(K/L)}{dL}\right)} \tag{47}$$

und

$$\frac{d(K(L)/L)}{dL} = \frac{\frac{dK}{dL}L - K}{L^2} = -\frac{\frac{Q_L}{Q_K}L + K}{L^2} = -\frac{Q_L L + Q_K K}{Q_K L^2}. \tag{48}$$

Damit ist also (46) zunächst

$$\begin{aligned} \frac{d(Q_L/Q_K)}{d(K/L)} &= \frac{Q_{LL}Q_K^2 - 2Q_{KL}Q_L Q_K + Q_{KK}Q_L^2}{Q_K^3}\frac{-L^2 Q_K}{Q_L L + Q_K K} && (49)\\ &= -\frac{(Q_{LL}Q_K^2 - 2Q_{KL}Q_L Q_K + Q_{KK}Q_L^2)L^2}{Q_K^2(Q_L L + Q_K K)} && (50) \end{aligned}$$

und insgesamt

$$\begin{aligned} \sigma_{KL} &= -\frac{Q_K^2(Q_L L + Q_K K)}{(Q_{LL}Q_K^2 - 2Q_{KL}Q_L Q_K + Q_{KK}Q_L^2)L^2}\frac{Q_L/Q_K}{K/L}\\ &= -\frac{(Q_L L + Q_K K)Q_L Q_K}{(Q_{LL}Q_K^2 - 2Q_{KL}Q_L Q_K + Q_{KK}Q_L^2)KL}. && (51) \end{aligned}$$

Für Produktionsfunktionen, die homogen vom Grade 1 sind, vereinfacht sich dieser Ausdruck wieder enorm. So ist zunächst aufgrund des Eulerschen Theorems

$$Q_L L + Q_K K = Q. \tag{52}$$

Ferner sind (aufgrund von Eigenschaft 2) Q_L und Q_K homogen vom Grade 0, also wiederum wegen des Eulerschen Theorems

$$\begin{aligned} 0 &= Q_{LL}L + Q_{KL}K \Rightarrow Q_{LL} = -\frac{K}{L}Q_{KL} && (53)\\ 0 &= Q_{KK}K + Q_{KL}L \Rightarrow Q_{KK} = -\frac{L}{K}Q_{KL}. && (54) \end{aligned}$$

Setzt man (53) und (54) im Nenner von (51) für Q_{LL} und Q_{KK} ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_{KL} &= \frac{(Q_L L + Q_K K)Q_L Q_K}{Q_{KL}\left[(K/L)Q_K^2 + 2Q_L Q_K + (L/K)Q_L^2\right]KL} && (55)\\ &= \frac{(Q_L L + Q_K K)Q_L Q_K}{Q_{KL}\left[K^2 Q_K^2 + 2KLQ_L Q_K + L^2 Q_L^2\right]} && (56)\\ &= \frac{(Q_L L + Q_K K)Q_L Q_K}{Q_{KL}\left(KQ_K + LQ_L\right)^2} = \frac{Q_L \cdot Q_K}{Q \cdot Q_{KL}}, && (57) \end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung (52) verwendet wurde.