Wiederholung der Hauptklausur STATISTIK

Name, Vorname: ______________________________

Matrikel-Nr. ______________________________

Die Klausur enthält zwei Typen von Aufgaben:

Teil A besteht aus Fragen mit mehreren vorgegebenen Antwortvorschlägen, von denen mindestens eine Antwort richtig ist und von denen mehrere Antworten richtig sein können. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten in den Kästchen unterhalb der Aufgabe an. Sie erhalten 1 Pluspunkt für jeden korrekt ausgewählten Antwortvorschlag (richtiger Antwortvorschlag wird ausgewählt bzw. nicht zutreffender Antwortvorschlag wird nicht ausgewählt). Sie erhalten 1 Minuspunkt für jeden falsch ausgewählten Antwortvorschlag (richtiger Antwortvorschlag wird nicht ausgewählt bzw. nicht zutreffender Antwortvorschlag wird ausgewählt). Es werden keine negativen Punktzahlen vergeben, Sie erhalten also für jede Aufgabe mindestens 0 Punkte. Diese Rohpunkte werden noch gewichtet, um die Klausurpunkte zu berechnen, die in die Berechnung der Prüfungsleistung eingehen. Das Gewicht ist 3/4 bei 4 Antwortmöglichkeiten und 3/5 bei 5 Antwortmöglichkeiten.

Teil B enthält ausführlich zu lösende Aufgaben. Nur mit der Darstellung der einzelnen Rechenschritte kann die volle Punktzahl erreicht werden.

Zulässige Hilfsmittel: Nicht programmierbarer Taschenrechner, Lehrbuch von Schira, eine handschriftlich von Ihnen selbst beschriebene Seite im DIN A4 Format ("Spickzettel", kann auf beiden Seiten beschrieben sein).

Teil A umfasst 8 Aufgaben und Teil B umfasst 4 Aufgaben. Bitte überprüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplars.

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Die in dieser Klausur maximal zu erreichende Punktzahl ist 60, davon können maximal 24 Klausurpunkte in Teil A und maximal 36 Punkte in Teil B erreicht werden.

Die Prüfungsleistung in Statistik ergibt sich auf Basis der erzielten Gesamtpunktzahl, die sich als Summe der in allen Prüfungsteilen erzielten (Klausur-)Punkte errechnet. Die erreichte Gesamtpunktzahl in der Zwischenklausur Statistik geht mit dem Gewicht 25% in die Gesamtpunktzahl der Prüfungsleistung ein.

Auswertung – Teil A

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Erreichte (Klausur-)Punktzahl								

Auswertung – Teil B

Aufgabe	1	2	3	4
Erreichte Punktzahl				

Erreichte Gesamtpunktzahl

Teil A (24 Punkte)

A.1 Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

A) Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X, die die Augenzahl bei einem Würfelfwurf angibt, ist überall stetig.

B) Der approximierende Polygonzug der Verteilungsfunktion einer stetigen Variable in einer Stichprobe von Beobachtungen, für die nur erfasst wird, in welche Größenklasse die Beobachtung fällt, ist überall stetig.

C) Die Logarithmendifferenz des Bruttoinlandsprodukts im Jahr 2010 und im Jahr 2000 entspricht dem Logarithmus des Wachstumsfaktors für das Wachstum von 2000 bis 2010.

D) Keine der Aussagen A) bis C) trifft zu.

A	B	C	D
	X	X	

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit 3/4 gewichtet.

A.2 Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f(x) = \sum_{i=1}^{5} (a_i - x)^2$ für folgende Daten:

i	1	2	3	4	5
a_i	-10	-6	-2	2	6

A) Das Minimum wird für $x = 0$ erreicht.

B) Das Minimum wird erreicht, wenn x dem arithmetischen Mittel der $a_1, ..., a_5$ entspricht.

C) Das Minimum wird in diesem Fall auch erreicht, wenn x dem Median der $a_1, ..., a_5$ entspricht.

D) Die Antworten A) bis C) sind falsch.

A	B	C	D
	X	X	

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit 3/4 gewichtet.

A.3 Sie beobachten Stundenlöhne W für Männer und Frauen in DM und berechnen $y = ln(w)$ für jede Beobachtung. Sie erhalten folgende Angaben:

Männerstichprobe
$\bar{y}_m = 3,6$, $y_m[0,25] = 3,2$, $y_m[0,5] = 3,5$, $y_m[0,75] = 4,2$

Frauenstichprobe
$\bar{y}_f = 3,15$, $y_f[0,25] = 2,8$, $y_f[0,5] = 3,18$, $y_f[0,75] = 3,4$

Die Ausdrücke der eckigen Klammern bezeichnen die entsprechenden empirischen Quantile. Ihre Stichprobe besteht zu 75% aus Männern.

A) Das geometrische Mittel der Löhne W der Männer beträgt DM 36,60 (auf zwei Nachkommastellen gerundet).

B) Das geometrische Mittel der Löhne W der Frauen beträgt DM 24,05 (auf zwei Nachkommastellen gerundet).

C) Der Median der Löhne W der Frauen beträgt DM 24,05 (auf zwei Nachkommastellen gerundet).

D) Das geometrische Mittel der Löhne W aller Arbeitnehmer beträgt DM 32,70 (auf zwei Nachkommastellen gerundet).

E) Die Varianz der Löhne W für Männer lässt sich aus den obigen Angaben berechnen.

A	*B*	*C*	*D*	*E*
X		X	X	

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit 3/5 gewichtet.

A.4 Ihnen liegen die gleichen Angaben wie in Aufgabe A.3 vor.

A) Das untere Quartil der Löhne W der Männer beträgt DM 24,10 (auf zwei Nachkommastellen gerundet).

B) Gemessen am Median verdienen Männer 32 Logpunkte mehr als Frauen (gerundet).

C) Gemessen am Median verdienen Männer 38,6% mehr als Frauen (auf eine Nachkommastelle gerundet).

D) Der relative Unterschied zwischen dem oberen Quartil und dem Median ist für Frauen größer als für Männer.

A	*B*	*C*	*D*
	X		

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit 3/4 gewichtet.

A.5 Folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion ist gegeben:

x_i	-2	0	1	4
$f(x_i)$	0,2	0,3	0,3	0,2

A) $F(0) = 0,5$

B) 75%-Quantil: $x_{[0,75]} = 1$

C) $E(X) = 0,5$

D) $Var(X) = 1,1$ (auf eine Nachkommastelle gerundet)

A	*B*	*C*	*D*
X	X		

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit 3/4 gewichtet.

A.6 Eine Maschinenfabrik betreibt 40 Drehstühle. In einem Jahr fallen im Durchschnitt zwei Drehstühle aus und müssen repariert werden. Die Zufallsvariable Dauer bezeichne die Dauer zwischen zwei Reparaturzeitpunkten. Unterstellen Sie, dass Dauer exponentialverteilt sei und dass die 40 Drehstühle statistisch unabhängig arbeiten.

A) Im Durchschnitt liegen 10 Jahre zwischen zwei Reparaturzeitpunkten, also ist $E(\text{Dauer}) = 10$ Jahre.

B) $Var(\text{Dauer}) = 400$ Jahre^2

C) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Drehstuhl mindestens zwei Jahre störungsfrei arbeitet, beträgt 90% (gerundet).

D) Die Antworten A) bis C) sind falsch.

A	*B*	*C*	*D*
	X	X	

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit 3/4 gewichtet.

A.7 Die Zufallsvariablen X und Y seien normalverteilt mit $X \sim N(0,1)$ und $Y \sim N(2,4)$, wobei $N(\mu, \sigma^2)$ eine Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 ist. Sei $Z = X + Y$.

A) $P(X \leq 1) = 0,8413$ (auf 4 Nachkommastellen gerundet)

B) $P(-1 \leq X \leq 1) = P(0 \leq Y \leq 4)$

C) $P(Y \geq 5) = 6{,}7\%$

D) $E(Z) = 4$

A	*B*	*C*	*D*
X	X	X	

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit 3/4 gewichtet.

A.8 Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0,2$. X entspreche der Anzahl von Personen, die einen Bargeldbestand von höchstens 20 € aufweisen.

A) $Var(X) = 3,2$

B) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 75, 2% (auf eine Nachkommastelle gerundet) haben mindestens 19 Personen einen Bargeldbestand von über 20 €.

C) $X = \sum_{i=1}^{n} I(A_i)$, wobei A_i das Ereignis ist, dass Person i einen Bargeldbestand über 20 € aufweist, und I(.) ist die Indikatorfunktion.

D) Keine der Aussagen A) bis C) trifft zu.

A	*B*	*C*	*D*
X			

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit 3/4 gewichtet.

Teil B (36 Punkte)

B.1 Die stetige Zufallsvariable X sei im Bereich $1 < x < 3$ gleichverteilt.

a) Was ist der Erwartungswert von X? (1 Punkt)

b) Was ist die Varianz von X? (1 Punkt)

c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $g(X) = e^X$, d.h. $E(g(X))$. Unterscheidet er sich vom Wert $g(E(X))$ und wenn ja, warum? (2 Punkte)

(4 Punkte)

B.2 In einer Urne befinden sich vier gelbe Kugeln und eine rote Kugel. Sie ziehen drei Kugeln zufällig aus der Urne.

a) Betrachten Sie zunächst den Fall **mit Zurücklegen**. Erstellen Sie eine Liste aller unterscheidbaren Anordnungen der drei gezogenen Kugeln unter Berücksichtigung der Reihenfolge. Geben Sie für jede Anordnung die Wahrscheinlichkeit ihres Eintritts an. (2,5 Punkte)

b) Die Indikatorvariablen für Gelb seien wie folgt definiert ($i = 1, 2, 3$):

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i\text{-te Kugel gelb} \\ 0 & \text{wenn } i\text{-te Kugel rot} \end{cases}$$

Welche Randverteilung weisen X_1, X_2 und X_3 auf? Wie heißt diese Verteilung? Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X_1, X_2 und X_3. Weisen alle drei Zufallsvariablen die gleiche Verteilung auf? (2 Punkte)

c) Berechnen Sie $Cov(X_1, X_2)$ (0,5 Punkte)

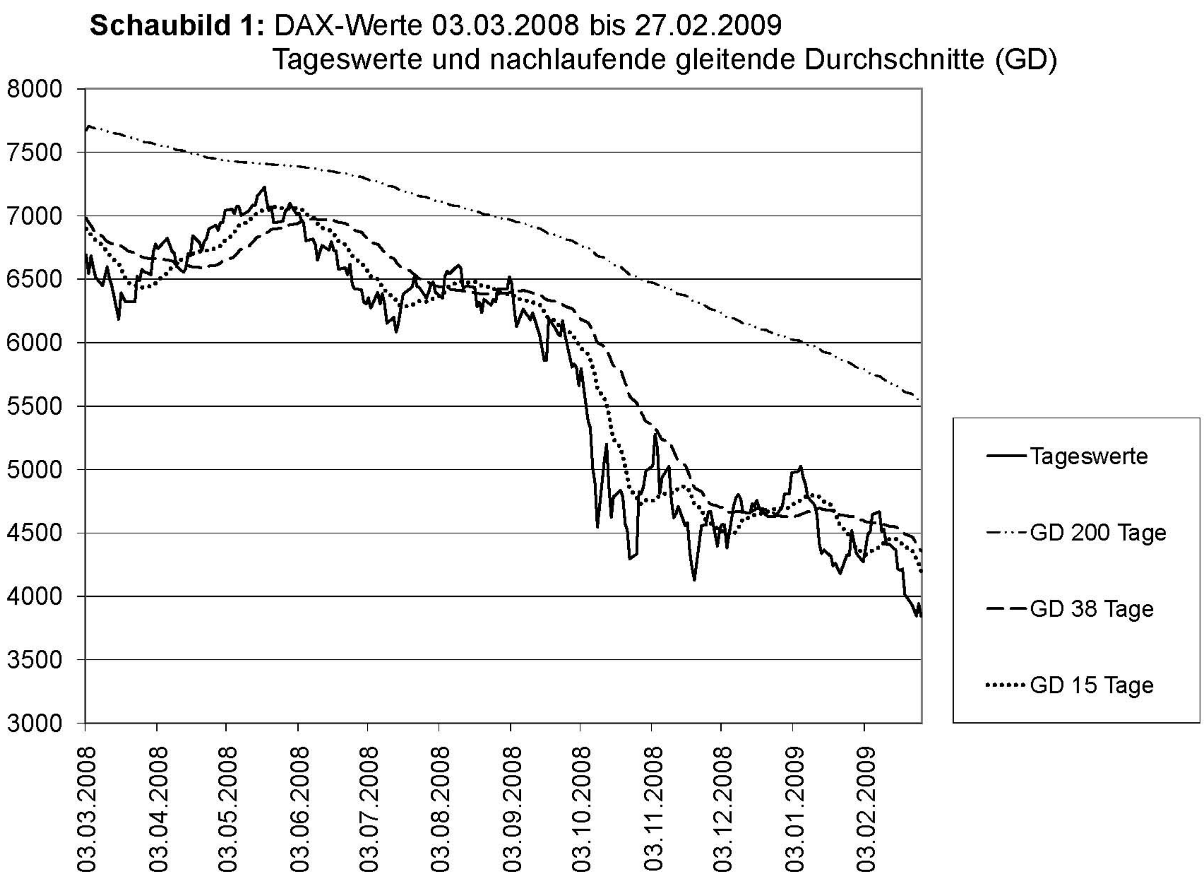
d) Betrachten Sie ab nun den Fall **ohne Zurücklegen**. Erstellen Sie eine Liste aller unterscheidbaren Anordnungen der drei gezogenen Kugeln unter Berücksichtigung der Reihenfolge. Geben Sie für jede Anordnung die Wahrscheinlichkeit ihres Eintritts an. (2,5 Punkte)

e) Betrachten Sie wieder die drei in b) definierten Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3. Welche Randverteilung weisen X_1, X_2 und X_3 auf? Wie heißt diese Verteilung? Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X_1, X_2 und X_3. Weisen alle drei Zufallsvariablen die gleiche Verteilung auf? (2 Punkte)

f) Berechnen Sie $Cov(X_1, X_2)$ (0,5 Punkte)

(10 Punkte)

B.3 Schaubild 1 stellt die zeitliche Entwicklung der Tageswerte des DAXes zwischen dem 03.03.2008 und dem 27.02.2009 dar sowie drei daraus berechnete nachlaufende gleitende Durchschnitte.



a) Beschreiben und erläutern Sie, wie die gleitenden Durchschnitte aus den Tageswerten des DAXes berechnet wurden. Geben Sie hierzu auch die präzisen mathematischen Formeln an. Für welchen Mindestzeitraum liegen die Tageswerte des DAXes hierfür vor? (4 Punkte)

b) Ihnen liegen in Excel die Tageswerte des DAXes vor. Erläutern Sie präzise, wie Sie in Excel die im Schaubild 1 dargestellten gleitenden Durchschnitte berechnen und dann das Schaubild erstellen. (3 Punkte)

c) Interpretieren Sie kurz den Verlauf der vier Kurven in Schaubild 1 im Lichte der 2008 beginnenden Wirtschafts- und Finanzkrise. (2 Punkte)

(9 Punkte)

B.4 Ein großes Unternehmen plant einen neuen Wintersportartikel, die Skihose Alpha, zum Preis von 180 Euro auf den Markt zu bringen. Wegen hoher Fixkosten und der Kostenersparnisse durch Massenproduktion geht man von der Kostenfunktion

$$K(x) = 1800 + 50x - x^2$$

aus, wobei $K(x)$ die Kosten in Tausend Euro und x die Ausbringung in Tausend Stück sind. Der Gewinn $G(x)$ hängt von x wie folgt ab:

$$G(x) = -1800 + 130x + x^2$$

Hinweis: Diese Aufgabe orientiert sich am Praxisbeispiel zu Kapitel 9 im Lehrbuch von Schira.

a) Für welche Ausbringungsmenge x_0 ist der Gewinn $G(x_o)$ gleich null? x_0 ist der sogenannte Breakeven-Point.

Hinweise:
- x_0 kann nur positiv sein.
- Die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

(1,5 Punkte)

b) Eine Marktstudie ermittelt, dass X, die Nachfrage nach der Skihose Alpha bei einem Preis von 180 Euro, stetig gleichverteilt zwischen 5 Tausend und 20 Tausend Stück ist. Berechnen Sie Erwartungswert, Median und 90%-Quantil der Absatzmenge. Interpretieren Sie die drei berechneten Größen. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Verlust zu machen, d.h. $P(G(X) \leq 0)$. Verwenden Sie dazu das Ergebnis aus a). (1,5 Punkte)

d) Berechnen Sie den Gewinn für den Erwartungswert und für das 90%-Quantil der Absatzmenge. (2 Punkte)

e) Bestimmen Sie den Median und das 90%-Quantil des Gewinnes. Welcher Zusammenhang besteht dabei zu den in d) erzielten Ergebnissen? Interpretieren Sie kurz die Ergebnisse im Vergleich. (2 Punkte)

f) Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns. (2 Punkte)

g) Würden Sie dem Unternehmen empfehlen, die Skihose Alpha zu produzieren und zum Preis von 180 Euro auf den Markt zu bringen? Begründen Sie Ihre Antwort und orientieren Sie sich an den in a) bis f) erzielten Ergebnissen. (2 Punkte)

(13 Punkte)

Ende der Klausur