Übungsblatt 9

Aufgabe 1:

Basketball. Ein Profi wirft beim Training aus einer Entfernung von sieben Metern auf den Korb. Er trifft bei jedem Wurf mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 1/2$. Die Zufallsvariable X ist definiert als die Anzahl der Treffer bei einer Serie von vier Würfen.

a) Geben Sie die Massenfunktion dieser Zufallsvariablen an.

b) Wie groß sind Modus, Median, Erwartungswert und Varianz von X?

c) Berechnen Sie die Schiefe und die Kurtosis der Verteilung.

d) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion.

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 9; Aufg. 9.1)

Aufgabe 2:

Exponentialverteilung. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = e^{-x}, \text{ für } 0 \leq x \leq \infty$$

a) Zeigen Sie, dass $f(x)$ eine Dichtefunktion ist.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die von dieser Dichtefunktion charakterisierte Zufallsvariable X einen größeren Wert als 0.5 annimmt?

c) Berechnen Sie den Modus und den Median.

d) Berechnen und zeichnen Sie zu $f(x)$ die Verteilungsfunktion $F(x)$.

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 9; Aufg. 9.5)

Aufgabe 3:

Erwartungswert einer Funktion. Die stetige Zufallsvariable X sei im Bereich $0 < x < 3$ gleichförmig mit der konstanten Dichte von $1/3$ verteilt.

a) Wie groß ist der Erwartungswert von X?

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der reziproken Zufallsvariablen $h(X) = 1/X$. Unterscheidet er sich vom Wert $1/E(X)$ und wenn ja, warum?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Funktion $h(X) = 4X + 2$. Unterscheidet er sich vom Wert $h[E(X)]$ und wenn ja, warum?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 9; Aufg. 9.7)

Aufgabe 4:

Dreiecksverteilung. Die Verteilung einer kontinuierlichen Zufallsvariable X sei durch folgende Dichtefunktion f definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 2ax & \text{für } 0 < x < 1 \\ 3a - ax & \text{für } 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist a eine geeignet zu wählende Konstante.

a) Wie groß muss a sein? (Begründung)

b) Fertigen Sie eine Skizze für die Dichtefunktion an.

c) Wie groß sind folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X = 1),$$
$$P(0.5 < X < 2) \text{ und}$$
$$P(X < 2) \text{ ?}$$

d) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(X < 1\,|X < 0.5) \text{ ?}$$

e) Ist der Modus größer als der Erwartungswert?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 9; Aufg. 9.3)

Aufgabe 5:

Die Massenfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen (X,Y) ist in folgender Tabelle dargestellt.

		Y		
		2	3	4
X	10	1/9	1/9	1/9
	20	1/6	0	1/6
	30	1/18	2/9	1/18

In der Kopfzeile stehen die möglichen Ausprägungen von Y, in der Kopfspalte diejenigen von X, im Inneren der Tabelle die Wahrscheinlichkeitsmassen.

a) Berechnen Sie die beiden Randverteilungen.

b) Berechnen Sie die Verteilung für X unter der Bedingung, das Y = 4 ist.

c) Berechnen Sie Var(X) und Var(Y).

d) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten.

e) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

f) Wie verändern sich die Kovarianz und der Korrelationskoeffizient, wenn X und Y wie folgt linear transformiert werden:
$X' = 2 + 3X$ und $Y' = 1 - Y$?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 10; Aufg. 10.1 und 10.2)

Aufgabe 6:

Portfolio. Eine Aktie der Gesellschaft BASF werfe einen mittleren Jahresgewinn (Dividende + Kursgewinn) von $\mu = 20$ € ab. Die Unsicherheit im tatsächlichen Gewinn soll in seiner Standardabweichung $\sigma = 40$ € zum Ausdruck kommen.

a) Wie groß sind Erwartungswert und Standardabweichung des Gewinns eines Portfolios mit drei Aktien der Gesellschaft BASF ?

b) Angenommen, es gäbe zwei weitere Gesellschaften, SAP und DB, deren Aktien genau dieselben Erwartungswerte und Standardabweichungen für ihre Gewinne aufweisen wie im Falle der Gesellschaft BASF. Die Höhe der Gewinne der drei Aktientypen soll jedoch unabhängig sein.

   Wie groß sind Erwartungswert und Standardabweichung für ein Portfolio, das von jeder der drei Gesellschaften genau eine Aktie enthält ?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 10; Aufg. 10.6)

Zusatzaufgaben

Aufgabe Z1:

In einer Urne befinden sich vier weisse, eine gelbe und eine grüne Kugel. Sie ziehen zwei Kugeln aus der Urne ohne Zurücklegen. Betrachten Sie die beiden Zufallsvariablen

$$X = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{falls weisse Kugel} \\ 0 & \text{falls gelbe Kugel} \\ 1 & \text{falls grüne Kugel} \end{array} \right\} \text{im ersten Zug}$$

$$Y = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{falls weisse Kugel} \\ 0 & \text{falls gelbe Kugel} \\ 1 & \text{falls grüne Kugel} \end{array} \right\} \text{im zweiten Zug}$$

a) Unterstellen Sie, dass die sechs Kugeln mit den Buchstaben A, B, C, D, E und F markiert sind. Wie viele Elementarereignisse in Hinblick auf zwei hintereinander gezogene Kugeln gibt es? Listen Sie alle Elementarereignisse auf.

b) Bestimmen Sie die Verteilung von X auf Basis der Ergebnisse in a). Stellen Sie die Massenfunktion und die Verteilungsfunktion graphisch dar.

c) Bestimmen Sie die Verteilung von Y auf Basis der Ergebnisse in a). Warum stimmen die Verteilungen von X und Y überein? Ist die Reihenfolge des Ziehens der Kugeln irrelevant?
Hinweis: Sie m¨ussen die Verteilung von Y nicht nochmals graphisch darstellen.

d) Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$.

e) Berechnen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y, sprich $P(X = i, Y = j)$ und stellen Sie die gemeinsame Verteilung in einer Tabelle dar. Was sind die Zeilensummen und die Spaltensummen?

f) Berechnen Sie $Cov(X, Y)$.

g) Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort. Welche Bedeutung hat Ihre Antwort zu $f)$ für die Antwort auf diese Frage?

(Aufgabe aus der Hauptklausur Statistik, SS2008)

Aufgabe Z2:

Zwei Zufallsvariablen haben die Varianzen $Var(X_1) = 1$ und $Var(X_2) = 4$. Die Kovarianz sei $Cov(X_1, X_2) = 1$.

A) $Var(X_1 + X_2) = 7$

B) $Var(X_1 - X_2) = 3$

C) $Var(2X_1 - 3X_2) = 1$

D) $Var(6X_2 - 2X_1) = 5$

E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

A	B	C	D

Geben Sie an, welche Antwortvorschläge richtig sind. Beachten Sie, dass mindestens ein Antwortvorschlag richtig ist. Schreiben Sie Ihre Berechnungen zur Lösung jeder Teilaufgabe als Teil der Lösung auf und erläutern Sie kurz Ihre Vorgehensweise.

(Aufgabe aus der Hauptklausur Statistik, WS07/08)

Aufgabe Z3:

Ein großes Unternehmen plant einen neuen Wintersportartikel, die Jacke Skihase, zum Preis von 150 Euro auf den Markt zu bringen. Wegen hoher Fixkosten und der Kostenersparnisse durch Massenproduktion geht man von der Kostenfunktion

$$K(x) = 1200 + 70x - 2x^2$$

aus, wobei $K(x)$ die Kosten in Tausend Euro und x die Ausbringung in Tausend Stück sind. Der Gewinn $G(x)$ hängt von x wie folgt ab:

$$G(x) = -1200 + 80x + 2x^2$$

Hinweis: Diese Aufgabe orientiert sich am Praxisbeispiel zu Kapitel 9 im Lehrbuch von Schira

a) Für welche Ausbringungsmenge x_0 ist der Gewinn $G(x_o)$ gleich null? x_0 ist der sogenannte Breakeven-Point.

Hinweise:

- x_0 kann nur positiv sein.
- Die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

(1,5 Punkte)

b) Eine Marktstudie ermittelt, dass X, die Nachfrage nach der Jacke Skihase bei einem Preis von 150 Euro, stetig gleichverteilt zwischen 6 Tausend und 17 Tausend Stück ist. Berechnen Sie Erwartungswert, Median und 90%-Quantil der Absatzmenge. Interpretieren Sie die drei berechneten Größen. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen Verlust zu machen, d.h. $P(G(X) \geq 0)$. Verwenden Sie dazu das Ergebnis aus a). (1,5 Punkte)

d) Berechnen Sie den Gewinn für den Erwartungswert und für das 90%-Quantil der Absatzmenge. (2 Punkte)

e) Bestimmen Sie den Median und das 90%-Quantil des Gewinnes. Welcher Zusammenhang besteht dabei zu den in d) erzielten Ergebnissen? Interpretieren Sie kurz die Ergebnisse im Vergleich. (2 Punkte)

f) Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns. (2 Punkte)

g) Würden Sie dem Unternehmen empfehlen, die Jacke Skihase zu produzieren und zum Preis von 150 Euro auf den Markt zu bringen? Begründen Sie Ihre Antwort und orientieren Sie sich an den in a) bis f) erzielten Ergebnissen. (2 Punkte)

(13 Punkte)

(Aufgabe aus der Wiederholungsklausur Statistik, SS2010)