

Probeklausur STATISTIK I

Name, Vorname: _____

Matrikel-Nr.: _____

Die Klausur enthält zwei Typen von Aufgaben:

T e i l A besteht aus Fragen mit mehreren vorgegebenen Antwortvorschlägen, von denen mindestens eine Antwort richtig ist und von denen mehrere Antworten richtig sein können. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Sind alle Kreuze richtig, erhalten Sie für die Aufgabe 2 Punkte. Jede Abweichung ergibt 1 Punkt Abzug. Es werden keine negativen Punktezahlen vergeben, Sie erhalten also für jede Aufgabe mindestens 0 Punkte.

T e i l B enthält ausführlich zu lösende Aufgaben. Nur mit der Darstellung der einzelnen Rechenschritte kann die volle Punktzahl erreicht werden.

Zulässige Hilfsmittel: Nicht programmierbarer Taschenrechner, Lehrbuch von Schira, eine selbstbeschriebene Seite ("Spickzettel", kann auf beiden Seiten beschrieben sein).

Teil A enthält 8 Aufgaben und Teil B enthält 4 Aufgaben. Bitte überprüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplars.

Auswertung - Teil A

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Erreichte Punktzahl								

Auswertung - Teil B

Aufgabe	1	2	3	4
Erreichte Punktzahl				

Erreichte Gesamtpunktzahl

Teil A (16 Punkte)

1. Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f(x) = \sum_{i=1}^4 (a_i - x)^2$ für folgende Daten:

i	1	2	3	4
a_i	-1	-1	1	5

- A) Das Minimum beträgt $x = 2$.
- B) Das Minimum beträgt $x = 1$.
- C) Das Minimum entspricht dem arithmetischen Mittel der a_1, \dots, a_4 .
- D) Das Minimum entspricht dem geometrischen Mittel der a_1, \dots, a_4 .
- E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>

2. Betrachten Sie folgende Stichprobe:

i	1	2	3	4
x_i	2	3	0	5

- A) $\sum_{i=1}^4 x_i = 10$
- B) $\bar{x} = 2$
- C) $\text{Median}(x_i) = 2,5$.
- D) Die Verteilung von x_i ist rechtsschief.
- E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>

3. In einem Unternehmen beträgt der Median aller gezahlten Gehälter 4500,- Euro und das arithmetische Mittel 4800,- Euro. Aufgrund der hohen Nachfrage nach Spezialisten werden die Gehälter der bestbezahlten Arbeitnehmer um 15% erhöht. Auf die Gruppe der Begünstigten entfielen vor der Erhöhung die 25% höchsten Gehälter bzw. 50% der gesamten Gehaltssumme.

- A) Der arithmetische Mittelwert steigt nach der Gehaltserhöhung auf 5120,- Euro.
- B) Der Median verbleibt bei 4500,- Euro.
- C) Der Median steigt um 15%.
- D) Der arithmetische Mittelwert steigt um 7,5%.
- E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>

4. Bei der letzten Mathematiklausur wurden folgende Punktzahlen x_i erreicht:

Punkte von ... bis unter	Anzahl
0 – 50	30
50 – 75	80
75 – 100	40

Unterstellen Sie eine stetige Gleichverteilung der Punktzahlen innerhalb der genannten Intervalle.

- A) Die relative Häufigkeitsdichte bei 40 Punkten beträgt: $\bar{h}(40)=0,0004$.
- B) Die relative Häufigkeitsdichte bei 80 Punkten beträgt: $\bar{h}(80)=0,0107$.
- C) $x_{Med} = 64,06$
- D) $\bar{x} = 61,67$
- E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>

5. Statistische Qualitätskontrolle: Aufgrund von Erfahrungen aus der Vergangenheit vermutet ein Automobilhersteller, dass eine von seinem Zulieferer gelieferte Glühbirne für Scheinwerfer mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1% defekt ist.
- A) Die Wahrscheinlichkeit, dass 1000 Glühbirnen aus der nächsten Lieferung alle nicht defekt sind, beträgt 60,2%.
- B) Die Wahrscheinlichkeit, dass von 20 Glühbirnen höchstens 1 defekt ist, beträgt $0,999^{20} = 98\%$.
- C) Die Wahrscheinlichkeit, dass weder die sich in einem Scheinwerfer befindliche Glühbirne, noch die dem Fahrzeug beiliegende Ersatzbirne funktioniert, beträgt 0,05 %.
- D) Für das letzte, heute produzierte Auto werden 4 funktionierende Glühbirnen benötigt und es stehen noch 5 Glühbirnen zur Verfügung. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto mit 4 funktionierenden Glühbirnen bestückt werden kann, beträgt $\binom{5}{1} \cdot 0,999^4 \cdot 0,001^1 = 0,498\%$.
- E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>

6. Was leistet die Excel-Funktion "Histogramm"?
- A) Sie erstellt ein Histogramm.
- B) Sie erstellt ein Diagramm mit absoluten Häufigkeiten.
- C) Sie erstellt ein Kreisdiagramm.
- D) Sie sortiert die Daten in vorgegebene Klassen ein.
- E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>

7. Unvollständige Konkurrenz: Die drei Anbieter auf einem Markt haben folgende Aktionsparameter:

Unternehmen A: Preis, Menge, Qualität, Zahlungsbedingungen

Unternehmen B: Preis, Menge, Qualität, Standort, Zahlungsbedingungen

Unternehmen C: Preis, Menge, Qualität

Die Unternehmen vereinbaren, jedes Jahr maximal zwei Aktionsparameter zu verändern. Darüber hinaus vereinbaren sie, dass ein Unternehmen die Menge konstant hält, wenn es den Preis variiert. Wie viele unterschiedliche Kombinationen zugelassener Parameterveränderungen kann es dann auf dem Markt geben?

- A) $\binom{5}{2}$
- B) $4 \cdot 5 \cdot 3$
- C) $\binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{1} + \binom{5}{1} + \binom{3}{1}$
- D) 25
- E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

A	B	C	D	E

8. Zwei Zufallsvariablen haben die Varianzen $V(X_1) = 16$ und $V(X_2) = 9$. Die Kovarianz sei $Cov(X_1, X_2) = 3$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- A) $V(5X_1) = 80$
- B) $V(X_1 + 2) = 18$
- C) $V(X_1 + X_2) = 25$
- D) $V(X_1 - X_2) = 13$
- E) $V(2X_1 + 4X_2) = 208$
- F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

A	B	C	D	E	F

Teil B (29 Punkte)

1. Beweisen Sie folgende Aussage:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - d)^2 - n(\bar{x} - d)^2$$

Erläutern Sie jeden Ihrer Beweisschritte und das Ergebnis in Worten. Welche Eigenschaft der Varianz ergibt sich aus dem Ergebnis?

4 Punkte

2. Ein Spieler würfelt dreimal hintereinander mit einem fairen Würfel.

- a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Würfel die gleiche Augenzahl anzeigen?
(Hinweis: Betrachten Sie das Gegenereignis.)

2 Punkte

- b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Würfel die gleiche Augenzahl anzeigen?

2 Punkte

- c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Augensumme.

1 Punkt

- d) Berechnen Sie die Varianz der durchschnittlichen Augenzahl bei den drei Würfelwürfen.

1 Punkt

- e) Berechnen und zeichnen Sie die Massenfunktion und die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable Augensumme.

6 Punkte

- f) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme mindestens 10 beträgt, gegeben dass im ersten Würfelwurf die Augenzahl 5 und im zweiten Würfelwurf die Augenzahl 1 beträgt.

1 Punkt

13 Punkte

3. Im Folgenden finden Sie die realen Konsumausgaben in Deutschland für die Jahre 2004 bis 2006 in Milliarden Euro als Quartalsdaten.

Quartal	Konsumausgaben
1/2004	289
2/2004	298
3/2004	300
4/2004	313
1/2005	287
2/2005	300
3/2005	303
4/2005	311
1/2006	291
2/2006	300
3/2006	304
4/2006	317

Quelle: EUROSTAT

- a) Bilden Sie gleitende Durchschnitte vierter Ordnung mit ganzzahligen Indizes ($g_t = \frac{1}{8}y_{t-2} + \frac{1}{4}y_{t-1} + \frac{1}{4}y_t + \frac{1}{4}y_{t+1} + \frac{1}{8}y_{t+2}$).
- 2 Punkte
- b) Berechnen Sie das durchschnittliche absolute Wachstum pro Quartal über den Beobachtungszeitraum.
- 1 Punkt
- c) Verwenden Sie die Ergebnisse in a) und b) zur Prognose der Konsumausgaben im ersten und zweiten Quartal 2007. Nehmen Sie kritisch zu dieser Prognose Stellung.
- 2 Punkte
- d) Unterstellen Sie eine konstante additive Saisonfigur und führen Sie die Saisonbereinigung der Konsumausgaben mit Hilfe des Phasendurchschnittsverfahrens durch. Interpretieren Sie das Ergebnis in eigenen Worten.
- 4 Punkte
- e) Verwenden Sie das Ergebnis des Saisonbereinigungsverfahrens zur Verbesserung der Prognose in c).
- 1 Punkt

10 Punkte

4. Die stetige Zufallsvariable X weise folgende Dichtefunktion einer Dreiecksverteilung auf:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{für } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie

a) $P(0 < X < 1)$

0,5 Punkte

b) $P(0,5 < X < 1,2)$

1 Punkte

c) $E(X)$

0,5 Punkte

2 Punkte