Hauptklausur STATISTIK

Name, Vorname: ______________________

Matrikel-Nr. ______________________

Die Klausur enthält zwei Typen von Aufgaben:

Teil A besteht aus Fragen mit mehreren vorgegebenen Antwortvorschlägen, von denen mindestens eine Antwort richtig ist und von denen mehrere Antworten richtig sein können. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten in den Kästchen unterhalb der Aufgabe an. Sind alle Kreuze richtig, erhalten Sie für die Aufgabe 3 Punkte. Jede Abweichung ergibt 1,5 Punkte Abzug. Es werden keine negativen Punktzahlen vergeben, Sie erhalten also für jede Aufgabe mindestens 0 Punkte. Wenn Sie keine Antwort ankreuzen, gilt die Aufgabe als nicht bearbeitet und Sie erhalten 0 Punkte.

Teil B enthält ausführlich zu lösende Aufgaben. Nur mit der Darstellung der einzelnen Rechenschritte kann die volle Punktzahl erreicht werden.

Zulässige Hilfsmittel: Nicht programmierbarer Taschenrechner, Lehrbuch von Schira, eine handschriftlich von Ihnen selbst beschriebene Seite im DIN A4 Format ("Spickzettel", kann auf beiden Seiten beschrieben sein).

Teil A umfasst 8 Aufgaben und Teil B umfasst 5 Aufgaben. Bitte überprüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplars.

Die maximal zu erreichende Punktzahl ist 60, davon können maximal 24 Punkte in Teil A und maximal 36 Punkte in Teil B erreicht werden.

Studierende im Diplomstudiengang VWL bestehen mit mindestens 24 erreichten Punkten die Klausur.

Für Studierende im BSc VWL und alle sonstigen Studierenden werden die in der Klausur und der Zwischenklausur erzielten Punkte addiert. Diese Studierenden bestehen die Prüfung mit mindestens 32 erreichten Punkten.

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Auswertung - Teil A

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Erreichte Punktzahl								

Auswertung - Teil B

Aufgabe	1	2	3	4	5
Erreichte Punktzahl					

Erreichte Gesamtpunktzahl

Teil A (24 Punkte)

A.1 Bei der letzten Klausur in Mikroökonomik wurden folgende Punktzahlen x_i erreicht:

Punkte von ... bis unter	Anzahl
0–40	20
40–60	100
60–100	80

Unterstellen Sie eine stetige Gleichverteilung innerhalb der genannten Intervalle.

A) $\overline{x} = 59$ (gerundet)

B) $x_{Med} = 55$ (gerundet)

C) Das obere Quartil beträgt $x_{[0,75]} = 75$ (gerundet)

D) Die relative Häufigkeitsdichte bei 30 Punkten beträgt: $\bar{h}(30) = 0,5$.

A	B	C	D
✓		✓	

A.2 Das reale Bruttoinlandsprodukt (BIP) in Marinas betrug in den Jahren 2006–2009:

Jahr (t)	BIP in Mill. € (y_t)
2006	80
2007	85
2008	87
2009	86

A) Das durchschnittliche absolute Wachstum zwischen 2006 und 2009 betrug 2 Mill. € pro Jahr.

B) Das durchschnittliche prozentuale Wachstum zwischen 2006 und 2009 betrug 2,4% pro Jahr (auf eine Nachkommastelle gerundet).

C) Das durchschnittliche Wachstum zwischen 2006 und 2009 in Logarithmenprozenten (Log-Punkten) betrug 2,4 Logarithmenprozente pro Jahr (auf eine Nachkommastelle gerundet).

D) Wenn ein linearer Zeittrend zwischen den logarithmierten BIP-Werten in 2006 und in 2009 unterstellt wird, d.h. die BIP-Werte in 2006 und in 2009 liegen auf der Trendfunktion, dann beträgt auf Basis dieses Trends die BIP-Prognose für 2010: 88,1 Mill. € (auf eine Nachkommastelle gerundet).

A	B	C	D
✓	✓	✓	✓

A.3 Verwenden Sie die Daten aus Aufgabe 2. Bilden Sie zentrierte gleitende Dreierdurchschnitte $g_t = \frac{1}{3}(y_{t-1} + y_t + y_{t+1})$.

A) Der zentrierte gleitende Dreierdurchschnitt im Jahr 2007 beträgt $g_{2007} = 84$ Mill. €.

B) $g_{2008} = 85$ Mill. €

C) Das durchschnittliche Wachstum der Dreierdurchnitte in Logarithmenprozenten beträgt 2,35 Logarithmenprozente (Log-Punkte) pro Jahr (auf zwei Nachkommastellen gerundet).

D) Schreiben Sie die Dreierdurchschnitte auf Basis der durchschnittlichen Wachstumsrate in Logarithmenprozenten der Dreierdurchschnitte aus Aufgabenteil C) fort. Für 2010 lautet die Prognose dann: $\hat{g}_{2010} = 90,1$ Mill. € (gerundet).

A	B	C	D
✓		✓	✓

A.4 Eine stetige Zufallsvariable X gehorche der Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} & \text{für} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

A) $F(1,5) = 0,25$ (auf zwei Nachkommastellen gerundet)

B) $E(X) = 1,833$ (auf drei Nachkommastellen gerundet)

C) $V(X) = 0,19$ (auf zwei Nachkommastellen gerundet)
Hinweis: Sie können $V(X)$ direkt berechnen, sinnvollerweise über die vereinfachte Berechnung. Die Rechnungen vereinfachen sich weiter, wenn Sie die Varianz der verschobenen Zufallsvariablen $Y = X - 0,5$ berechnen, da $V(Y) = V(X)$. Verwenden Sie hierfür die Dichtefunktion von Y.

D) Die Antworten A) bis C) sind falsch.

A	*B*	*C*	*D*
✓	✓		

A.5 Für drei Güter sind in den Jahren 2005 und 2009 folgende Preise und umgesetzte Mengen ermittelt worden:

	Preis je Stück in €		Umgesetzte Mengen in Stück	
Gut	2005	2009	2005	2009
A	12	18	10	20
B	8	8	20	22
C	20	18	5	5

A) Der Preis für Gut A verteuert sich pro Jahr im Durchschnitt um 18,9% (auf eine Nachkommastelle gerundet).

B) Der Laspeyres-Preisindex für 2009 zur Basis 2005 = 100 beträgt 113 (gerundet).

C) Der Paasche-Preisindex für 2009 zur Basis 2005 = 100 beträgt 119 (gerundet).

D) Der Laspeyres-Mengenindex für 2009 zur Basis 2005 = 100 beträgt 166 (gerundet).

A	*B*	*C*	*D*
	✓		

A.6 Die Zeitdauer, die ein Server bei einer Internetanfrage mit einem Kunden beschäftigt ist, sei exponential verteilt und betrage im Durchschnitt 3 Sekunden.

A) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Anfrage mehr als 10 Sekunden Serverzeit benötigt, beträgt 3,6% (auf eine Nachkommastelle gerundet).

B) Über 90% der Anfragen benötigen weniger als 9 Sekunden.

C) Die Gesamtzeitdauer, die der Server für zwei direkt hintereinander ausgeführte Anfragen mit unabhängiger Bearbeitungsdauer benötigt, weist die Varianz 18 Sekunden^2 auf (gerundet).

D) Die Wahrscheinlichkeitsdichte an der Stelle 3 Sekunden beträgt 1,1 (auf eine Nachkommastelle gerundet).

A	B	C	D
✓	✓	✓	

A.7 Die Zufallsvariablen X und Y seien normalverteilt mit $X \sim N(0,1)$ und $Y \sim N(-4,9)$. Weiter gilt $Cov(X,Y) = -1$.

Hinweis: $N(\mu, \sigma^2)$ bezeichne eine Normalverteilung mit Erwarungswert μ und Varianz σ^2.

A) $P(Y \geq -4) = 0,5$

B) $E(2X + Y) = -2$

C) $P(-7 \leq Y \leq -1) = 0,8413$ (auf vier Nachkommastellen gerundet)

D) $V(2X - Y) = 10$

A	B	C	D
✓			

A.8 Für eine Haushaltsstichprobe des Einkommens in Euro (Variable X) liegen Ihnen klassierte Daten für die m Intervalle $[\xi_0, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], ..., [\xi_{m-1}, \xi_m]$ vor. Die Breite des $i$ten Intervalls sei $\Delta_i = \xi_{i-1}$.

A) Die relative Häufigkeitsdichte $\bar{h}_i$ weist als Einheit $\left[\frac{1}{Haushalt}\right]$ auf.

B) Die absolute Häufigkeitsdichte weist als Einheit $\left[\frac{Haushalte}{Euro}\right]$ auf.

C) Die Verteilungsfunktion $H(x)$ entspricht $H(\xi_i) = \sum_{j=1}^{i} h_j$ an den Intervallgrenzen $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$.

Innerhalb der Intervalle entspricht $H(x)$ dem Wert der Verteilungsfunktion am linken Intervallende.

D) Innerhalb der Intervalle ist die relative Häufigkeitsdichte $\bar{h}_i$ die Steigung des approximierenden Polygonzuges der in Antwort C) definierten Verteilungsfunktion.

A	B	C	D
	✓	✓	✓

Teil B (36 Punkte)

B.1 a) Ihnen liegen Lohnbeobachtungen w_i für n Arbeitnehmer vor ($i = 1, ..., n$), mit $n > 2$. Die Arbeitnehmer sind in zwei Branchen A und B beschäftigt. Beweisen Sie die Zerlegung der Gesamtvarianz der Löhne in die innere Varianz (innerhalb der Branchen) und die äußere Varianz (zwischen den Branchen) entsprechend Kapitel 2.6 im Lehrbuch von Schira. Erläutern Sie jeden Ihrer Beweisschritte in Worten. Interpretieren Sie die Varianzzerlegung für das konkrete ökonomische Beispiel.

(3,5 Punkte)

b) Branche A aus Aufgabenteil a) weise einen niedrigeren Durchschnittslohn als Branche B auf. Aus diesem Grund führt die Regierung nur in Branche A einen bindenden Mindestlohn w_{min} ein. Der Mindestlohn gelte nicht in Branche B. Diskutieren Sie den Einfluss der Einführung des Mindestlohns auf die Varianz der Löhne innerhalb der beiden Branchen und auf die Gesamtvarianz der Löhne. Unterstellen Sie plausible ökonomische Zusammenhänge und verwenden Sie die Varianzzerlegung aus Aufgabenteil a) für Ihre Argumentation.

(2,5 Punkte)

(6 Punkte)

B.2 Sie haben zwei Anlagemöglichkeiten und wollen 1.000 € anlegen. Die Renditeerwartung und das Risiko der beiden Anlagemöglichkeiten X und Y seien wie folgt:

	Renditeerwartung	Risiko
Wertpapier 1	$E(X) = 0,05$	$\sigma_X = 0,01$
Wertpapier 2	$E(Y) = 0,10$	$\sigma_Y = 0,035$

Weiterhin gilt $Cov(X,Y) = 0,00035$.

Hinweis: Beachten Sie das Praxisbeispiel in Kapitel 10 des Lehrbuchs von Schira.

a) Berechnen Sie für das Portfolio den Erwartungswert der Rendite und das jeweilige Risiko (Standardabweichung) der Rendite, wenn 0 €, 250 €, 500 €, 750 € oder 1000 € in Wertpapier 1 und der Rest der 1000 € in Wertpapier 2 investiert werden.

(5 Punkte)

b) Zeichnen Sie das $\mu{-}\sigma{-}Diagramm$ für die beiden Wertpapiere 1 und 2. Welches Portfolio weist das minimale Risiko auf? Warum gibt es in diesem Fall keinen Effekt der Risikodiversifikation? Wie hoch ist die Anlage in Wertpapier 1 und in Wertpapier 2 in dem Portfolio mit minimalem Risiko?

(4 Punkte)

(9 Punkte)

B.3 Ihnen liegen in Excel **Jahresdaten** über das reale BIP und die realen Investitionen in Deutschland im Zeitraum 1991 bis 2009 vor. Was versteht man unter dem realen BIP und den realen Investitionen? Wie berechnen Sie die logarithmischen Wachstumsraten der beiden Variablen? Wie würden Sie den konjunkturellen Zusammenhang zwischen den beiden Variablen empirisch untersuchen? Erläutern Sie kurz, wie Sie diese empirische Analyse mit Excel umsetzen. Wie sieht stilisiert die Entwicklung der beiden untersuchten Variablen im Laufe der aktuellen Wirtschaftskrise aus?

Hinweis: Eine graphische Darstellung kann hilfreich sein. Eine detaillierte Beschreibung der Formeln in Excel ist nicht notwendig.

(10 Punkte)

B.4 Die Massenfunktion einer zweidimensionalen Verteilung von Zufallsvariablen (X, Y) ist in folgender Tabelle dargestellt.

		Y		
		-1	0	1
	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0
X	5	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$
	10	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

In der zweiten Zeile stehen die möglichen Ausprägungen von Y, in der zweiten Spalte diejenigen von X, im Inneren der Tabelle die Wahrscheinlichkeitsmassen.

a) Berechnen Sie die beiden Randverteilungen. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$. (1 Punkt)

c) Berechnen Sie $V(X)$ und $V(Y)$. (2 Punkte)

d) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten. (2 Punkte)

e) Berechnen Sie die Verteilung für Y unter der Bedingung, dass $X \leq 5$ gilt.
Berechnen Sie $E(Y|X \leq 5)$. (1 Punkt)

(8 Punkte)

B.5 Auf einer Party sagt jeder Gast den Tag im Monat (1. eines Monats, 2. eines Monats, ..., 31. eines Monats) und den Monat (1, 2, ..., 12) seines Geburtstags. Dann wird die Summe der genannten Tage und Monate berechnet. Die Summe beträgt 35. Alle Gäste haben an unterschiedlichen Tagen im Jahr Geburtstag. Was ist die höchstmögliche Anzahl an Partygästen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(3 Punkte)