

Prüfungsklausur STATISTIK I

Name, Vorname: _____

Matrikel-Nr.: _____

Die Klausur enthält zwei Typen von Aufgaben:

Teil A besteht aus Fragen mit mehreren vorgegebenen Antwortvorschlägen, von denen mindestens eine Antwort richtig ist und von denen mehrere Antworten richtig sein können. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Sind alle Kreuze richtig, erhalten Sie für die Aufgabe 2 Punkte. Jede Abweichung ergibt 1 Punkt Abzug. Es werden keine negativen Punktezahlen vergeben, Sie erhalten also für jede Aufgabe mindestens 0 Punkte. Wenn Sie keine Antwort ankreuzen, gilt die Aufgabe als nicht bearbeitet und Sie erhalten 0 Punkte.

Teil B enthält ausführlich zu lösende Aufgaben. Nur mit der Darstellung der einzelnen Rechenschritte kann die volle Punktzahl erreicht werden.

Zulässige Hilfsmittel: Nicht programmierbarer Taschenrechner, Lehrbuch von Schira, eine handschriftlich von Ihnen selbst beschriebene Seite ("Spickzettel", kann auf beiden Seiten beschrieben sein).

Teil A enthält 12 Aufgaben und Teil B enthält 4 Aufgaben. Bitte überprüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplars.

Die maximal zu erreichende Punktzahl ist 60, davon können maximal 24 Punkte in Teil A und maximal 36 Punkte in Teil B erreicht werden. Mit mindestens 24 erreichten Punkten bestehen Sie die Klausur.

Auswertung - Teil A

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Erreichte Punktzahl												

Auswertung - Teil B

Aufgabe	1	2	3	4
Erreichte Punktzahl				

Erreichte Gesamtpunktzahl

Teil A (24 Punkte)

1. Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f(x) = \sum_{i=1}^4 |a_i - x|$ für folgende Daten:

i	1	2	3	4
a_i	3	4	4	6

- A) Das Minimum beträgt $x = 4,25$.
 B) Das Minimum beträgt $x = 4$.
 C) Das Minimum entspricht dem arithmetischen Mittel der $a_1, \dots, a_4$.
 D) Das Minimum entspricht dem Median der $a_1, \dots, a_4$.
 E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

A	B	C	D	E
	X		X	

2. Betrachten Sie folgende Stichprobe:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0	-1	-1	1	2	0,5

- A) $\bar{x} = 0$
 B) Die Verteilung von x_i ist symmetrisch.
 C) Der Modus von x_i ist -1.
 D) $s_x^2 = 7,25$.
 E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

A	B	C	D	E
		X		

3. Das reale BIP in Deutschland beträgt

€1959,4 Mrd. im Jahr 1998 und
€2128,5 Mrd. im Jahr 2005.

- A) Die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate zwischen 1998 und 2005 beträgt 1,35 %.
- B) Die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate zwischen 1998 und 2005 beträgt 1,19 %.
- C) Der Wachstumsfaktor zwischen 1998 und 2005 beträgt 1,0863.
- D) Das BIP ist zwischen 1998 und 2005 um 8,28% in Logarithmen angestiegen.
- E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
	<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>	

4. Man kennt für 10 Güter die Preise im Basisjahr und im 5 Jahre späteren Berichtsjahr sowie die Mengen im Basisjahr. Welchen Index kann man aus diesen Angaben berechnen?

- A) Laspeyres-Preisindex
- B) Paasche-Preisindex
- C) Laspeyres-Mengenindex
- D) Fisher-Preisindex
- E) Kettenindex der jährlichen Laspeyres-Preisindizes

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>X</i>				

5. In einem Unternehmen beträgt der Median aller gezahlten Gehälter €4000,- und das obere Quartil €5500,-. Aufgrund der hohen Nachfrage nach Spezialisten werden die Gehälter der 40% bestbezahlten Arbeitnehmer um 20% erhöht. Auf die Gruppe der Begünstigten entfielen vor der Erhöhung 60% der gesamten Gehaltssumme.

- A) Der Gini-Koeffizient steigt.
B) Das obere Quartil steigt um 20%.
C) Der arithmetische Mittelwert steigt um 12%.
D) Der Median steigt um 10%.
E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
<i>X</i>	<i>X</i>	<i>X</i>		

6. Eine Consultingfirma hat 6 hauptberufliche Mitarbeiter und 8 freie Mitarbeiter. Für ein neu akquiriertes Projekt soll ein Beratungsteam zusammengestellt werden mit einem Teamchef, einem hauptberuflichen Mitarbeiter und zwei beratenden freien Mitarbeitern. Der Teamchef muss ein hauptberuflicher Mitarbeiter sein.

- A) Es können $5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7$ Teams zusammengestellt werden.
B) Es können $\binom{6}{2} \cdot \binom{8}{2}$ Teams zusammengestellt werden.
C) 2 hauptberufliche Mitarbeiter verstehen sich schlecht mit 4 freien Mitarbeitern und können nur mit den 4 anderen freien Mitarbeitern in einem Team zusammen arbeiten. Wenn das so ist, gibt es nur $4 \cdot 3 \cdot \binom{8}{2} + 2 \cdot \binom{4}{2}$ verschiedene Teams.
D) Die Antworten A) bis C) sind falsch.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
			<i>X</i>

7. Zwei Zufallsvariablen haben die Varianzen $V(X_1) = 1$ und $V(X_2) = 4$.
Die Kovarianz sei $Cov(X_1, X_2) = 1$.

- A) $V(X_1 + X_2) = 7$
B) $V(X_1 - X_2) = 3$
C) $V(2X_1 - 3X_2) = 1$
D) $V(6X_2 - 2X_1) = 5$
E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

A	B	C	D	E
X	X			

8. Bei einem Experiment in der Vorlesung Statistik I wurden 30 Bonbons, darunter 15 gelbe und 15 orange Bonbons, zufällig an 30 Studierende verteilt. Dabei ergab sich folgende Kontingenztabelle der absoluten Häufigkeiten für den Zusammenhang zwischen der Farbe des gewählten Bonbons und dem Geschlecht des/der Studierenden:

	Farbe Gelb	Farbe Orange
Männlich	8	3
Weiblich	7	12

- A) Der Anteil weiblicher Studierender beträgt 63,3%.
B) Farbe des Bonbons und Geschlecht sind statistisch unabhängig.
C) Männer wählen eher gelbe Bonbons.
D) Der korrigierte Kontingenzkoeffizient beträgt 0,736.
E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

A	B	C	D	E
X		X		

9. Die Zufallsvariablen X und Y seien normalverteilt mit $X \sim N(0, 1)$ und $Y \sim N(4, 4)$, wobei $N(\mu, \sigma^2)$ eine Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 ist.

- A) $P(X \leq 0) = 0,5$.
 B) $P(-1 \leq X \leq 1) = P(3 \leq Y \leq 5)$.
 C) $P(-2 \leq X \leq 2) = P(0 \leq Y \leq 8)$.
 D) $P(Y \leq 6) = 1 - P(X \geq -1)$.
 E) $P(Y \leq 6) = 0,8413$.

A	B	C	D	E
X		X		X

10. Die Lebensdauer einer Glühbirne X sei exponentialverteilt. Man stellt fest, dass von 1000 Glühbirnen nach 50 Stunden Brennzzeit eine Glühbirne defekt ist.

- A) Die erwartete Lebensdauer einer Glühbirne ist 50000 Stunden.
 B) $E(X) = 5000$ Stunden.
 C) $P(X \geq 10000) = 0,223$.
 D) $V(X) = 2500000 \text{ Stunden}^2$.
 E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

A	B	C	D	E
X				

11. Die Schnittmenge des Ereignisses A mit der Vereinigungsmenge der Ereignisse B und C ist gleich:

- A) $\{A \cap B\} \cup \{A \cap C\}$
 B) A ohne die Schnittmenge von B und C
 C) der Schnittmenge von A und B und C
 D) des Komplements von $B \cap C$
 E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

A	B	C	D	E
X				

12. Die gemeinsame Verteilung der beiden stetigen Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{für } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- A) $P(-1 \leq X \leq 0) = 0,25$.
- B) $P(X \geq 0, Y \geq 0) = 0,25$.
- C) $E(X) = 0,5$.
- D) $Cov(X, Y) = 0$.
- E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

A	B	C	D	E
	X		X	

Teil B (36 Punkte)

1. Ihnen liegen in Excel saisonbereinigte Quartalsdaten über das reale BIP und die Zahl der Erwerbstätigen im Zeitraum 1991 bis 2007 vor. Was versteht man unter dem realen BIP? Wie würden Sie den konjunkturellen Zusammenhang zwischen BIP und Anzahl der Erwerbstätigen empirisch untersuchen? Erläutern Sie kurz, wie Sie konkret diese empirische Analyse mit Excel umsetzen.

(8 Punkte)

2. In einer Urne befinden sich vier weiße, eine gelbe und eine grüne Kugel. Sie ziehen zwei Kugeln aus der Urne ohne Zurücklegen. Betrachten Sie die beiden Zufallsvariablen

$$X = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{falls weiße Kugel} \\ 0 & \text{falls gelbe Kugel} \\ 1 & \text{falls grüne Kugel} \end{array} \right\} \text{ im ersten Zug}$$
$$Y = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{falls weiße Kugel} \\ 0 & \text{falls gelbe Kugel} \\ 1 & \text{falls grüne Kugel} \end{array} \right\} \text{ im zweiten Zug}$$

- a) Unterstellen Sie, dass die sechs Kugeln mit den Buchstaben A, B, C, D, E und F markiert sind. Wie viele Elementarereignisse in Hinblick auf zwei hintereinander gezogene Kugeln gibt es? Listen Sie alle Elementarereignisse auf.

(3 Punkte)

- b) Bestimmen Sie die Verteilung von X auf Basis der Ergebnisse in a). Stellen Sie die Massenfunktion und die Verteilungsfunktion graphisch dar.

(2 Punkte)

- c) Bestimmen Sie die Verteilung von Y auf Basis der Ergebnisse in a). Warum stimmen die Verteilungen von X und Y überein? Ist die Reihenfolge des Ziehens der Kugeln irrelevant? Hinweis: Sie müssen die Verteilung von Y nicht nochmals graphisch darstellen.

(2 Punkte)

- d) Berechnen Sie $E(X)$ und $V(X)$.

(1 Punkt)

- e) Berechnen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y, sprich $P(X = i, Y = j)$ und stellen Sie die gemeinsame Verteilung in einer Tabelle dar. Was sind die Zeilensummen und die Spaltensummen?

(2 Punkte)

f) Berechnen Sie $Cov(X, Y)$.

(1 Punkt)

g) Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort. Welche Bedeutung hat Ihre Antwort zu f) für die Antwort auf diese Frage?

(1 Punkt)

(12 Punkte)

3. Ein Unternehmen bezieht regelmässig in einem Monat 100 Tonnen Zement zum Preis von €50,- pro Tonne. Aufgrund hoher Nachfrage nach den Produkten des Unternehmens kauft das Unternehmen im Mai 2007 weitere 30 Tonnen Zement zum Preis von €60,- pro Tonne und weitere 20 Tonnen Zement zum Preis von €70,- pro Tonne. Was ist der durchschnittliche Einkaufspreis pro Tonne Zement im Mai 2007? Berechnen Sie

- a) das ungewichtete Mittel,
- b) das mit den Mengen gewichtete arithmetische Mittel und
- c) das ungewichtete harmonische Mittel der drei Preise.

Interpretieren Sie die drei berechneten Durchschnitte ökonomisch. Welche Information geben Ihnen die drei berechneten Durchschnittspreise?

(7 Punkte)

4. Für das kleine Land Trizonia liegen folgende Angaben zur Anzahl der Steuerpflichtigen, zur Gesamtsumme der Einkommen und zum Einkommensteueraufkommen nach drei Einkommensintervallen vor:

Einkommen von ... bis unter ... TM	Anzahl der Steuerpflichtigen	Einkommen in TM	Einkommensteuer- aufkommen in TM
0 – 1000	200	101394	10139
1000 – 5000	50	147406	24481
5000 – 20000	30	369987	92996

Das Einkommen und das Einkommensteueraufkommen werden in TM (Trizoniamark) gemessen. Die Einkommensteuer ist progressiv. Die Angaben in der dritten und vierten Spalte sind die Merkmalssummen über alle Steuerpflichtigen in dem betreffenden Einkommensintervall.

a) Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten, die relativen Häufigkeitsdichten und die Verteilungsfunktionen für die drei Variablen ‘Anzahl der Steuerpflichtigen’, ‘Einkommen’ und ‘Einkommensteueraufkommen’ nach den drei Einkommensintervallen. Tragen Sie Ihre Ergebnisse in eine Tabelle ein.

(4 Punkte)

- b) Zeichnen Sie die Histogramme für die drei Merkmale ‘Anzahl der Steuerpflichtigen’, ‘Einkommen’ und ‘Einkommensteueraufkommen’. Was stellen die drei unterschiedlichen Histogramme inhaltlich dar? Was sind die ökonomischen Gründe für die Unterschiede zwischen den drei Histogrammen?

(3 Punkte)

- c) Verwenden Sie die Ergebnisse in a), um die Lorenzkurven für das Einkommen und für die Einkommensteueraufkommen zu bestimmen. Zeichnen Sie die beiden Lorenzkurven. Welche der beiden Lorenzkurven zeigt höhere Ungleichheit an? Wie hängt das Ergebnis mit der Tatsache zusammen, dass die Einkommensteuer progressiv ist?

(2 Punkte)

(9 Punkte)