Übungsblatt 9 - Lösungen der Z-Aufgaben

Aufgabe Z1:

6 Kugeln: 4 weiß, 1 gelb, 1 grün

2 Ziehungen ohne Zurücklegen

a) Zahl der Elementarereignisse: $6 * 5 = 30$

-	AB	AC	AD	AE	AF
BA	-	BC	BD	BE	BF
CA	CB	-	CD	CE	CF
DA	DB	DC	-	DE	DF
EA	EB	EC	ED	-	EF
FA	FB	FC	FD	FE	-

b) Da die Verteilung auf Grundlage der Ergebnisse aus Aufgabenteil a) erstellt werden soll, kann man z.B. die weißen Kugeln explizit mit den Buchstaben A bis D versehen, die gelben mit E und die grünen mit F. Durch Abzählen erkennt man schließlich, dass die Wahrscheinlichkeiten wie folgt aussehen:

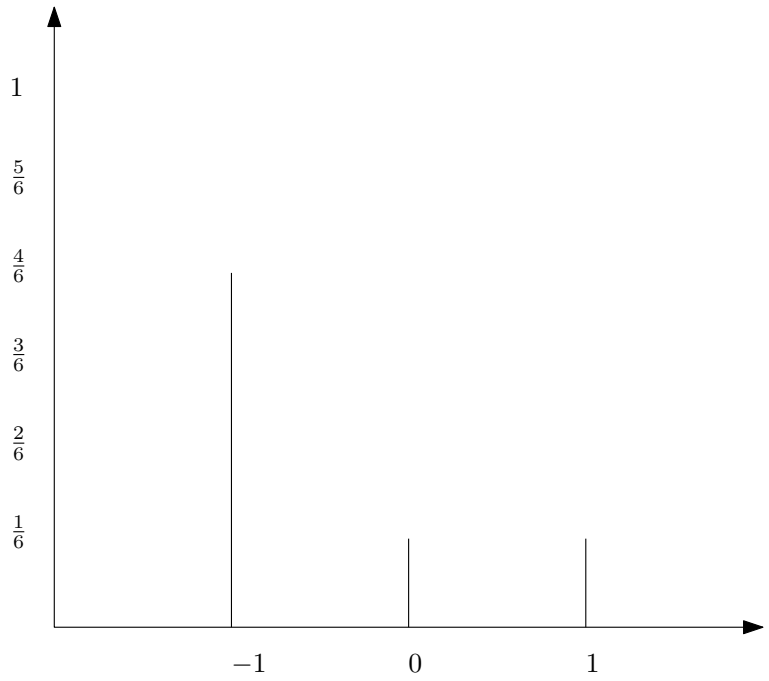
$$P(X = -1) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$
$$P(X = 0) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$
$$P(X = 1) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

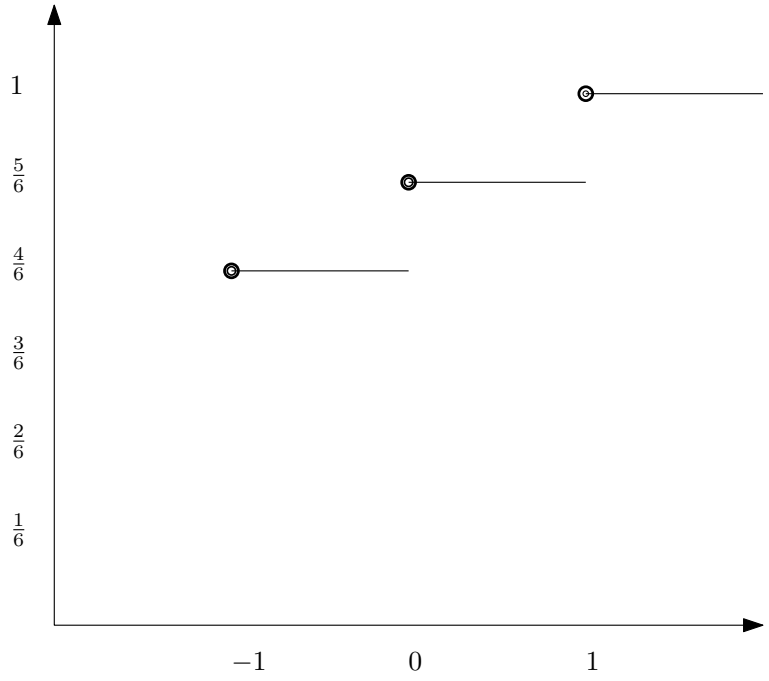
Daraus ergibt sich die Massenfunktion von X (da X eine diskrete ZV ist):

$$f(X) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{für } x = -1 \\ \frac{1}{6} & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{6} & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

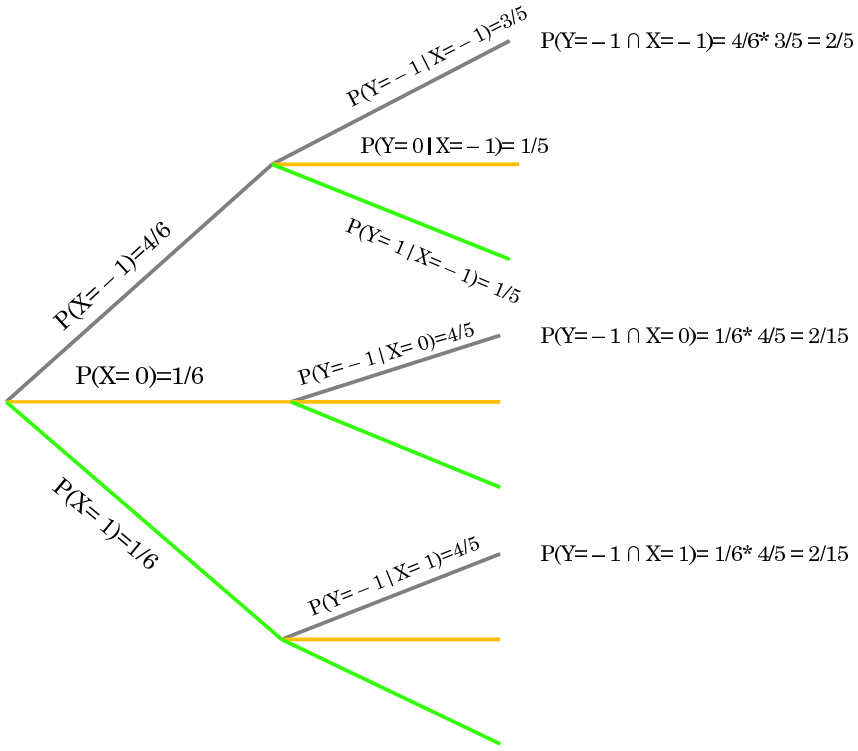
Verteilungsfunktion von X:

$$F(X) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{für } x = -1 \\ \frac{5}{6} & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$


1
5/6
4/6
3/6
2/6
1/6
−1
0
1


1
5/6
4/6
3/6
2/6
1/6
−1
0
1

c) Baumdiagramm:



Wenn beim 1. Ziehen eine weiße Kugel gezogen wurde, ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, beim 2. Mal ebenfalls eine weiße zu ziehen, 3/5.

$$P(Y = -1|X = -1) = 3/5$$

Wenn beim 1. Ziehen eine gelbe oder grüne Kugel gezogen wurde, ist die bedingte WK, beim 2. Mal eine weiße zu ziehen, jeweils 4/5.

$$P(Y = -1|X = 0) = 4/5$$

$$P(Y = -1|X = 1) = 4/5$$

Über den Multiplikationssatz ergibt sich die gemeinsame Verteilung von X und Y:

$$P(X = -1) \cdot P(Y = -1|X = -1) = P(X = -1 \cap Y = -1)$$

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Hieraus lässt sich die Randverteilung von Y berechnen:

$$P(Y=-1 \cap X=-1) + P(Y=-1 \cap X=0) + P(Y=-1 \cap X=1)$$
$$= P(Y=-1)$$
$$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5}$$
$$= \frac{2}{3}$$

Ebenso kann man ausrechnen: $P(Y=0) = \frac{1}{6}$ und $P(Y=1) = \frac{1}{6}$.

Alternativ könnte man die Randverteilung von Y wieder über das Abzählen der jeweiligen Elementarereignisse ermitteln.

Die Massenfunktion von Y lautet:

$$f(Y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{für } y=-1 \\ \frac{1}{6} & \text{für } y=0 \\ \frac{1}{6} & \text{für } y=1 \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion von Y:

$$F(Y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{für } y=-1 \\ \frac{5}{6} & \text{für } y=0 \\ 1 & \text{für } y=1 \end{cases}$$

Man sieht, dass die **unbedingte** Verteilung von Y (=Randverteilung) gleich der Randverteilung von X ist. Begründung: "Ziehen ohne Zurücklegen" lässt sich auch so vorstellen, dass zwei Kugeln gleichzeitig aus der Urne gezogen werden (weil auch hier dieselbe Kugel nicht zweimal gezogen werden kann). Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die eine Kugel in der Hand weiß ist, genau so hoch wie die WK, dass die andere Kugel weiß ist.

Die Reihenfolge ist jedoch insofern relevant, als die **bedingte** Verteilung von Y von dem Wert von X abhängt. Wenn z.B. beim 1. Mal weiß gezogen wurde, beeinflusst dies die Wahrscheinlichkeit, dass dann zusätzlich beim 2. Mal weiß gezogen wird. Betrachtet man jedoch nur die unbedingte Wahrscheinlichkeit, beim 2. Mal weiß zu ziehen (d.h. egal, was im 1. Zug gezogen wurde), so ist diese gleich der Wahrscheinlichkeit, beim 1. Mal weiß zu ziehen.

d) $E(X) = -1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{3}{6} = -0,5$

$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = (-1+0,5)^2 \cdot \frac{4}{6} + (0+0,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (1+0,5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{9}{24} = \frac{7}{12}$

e) Gemeinsame Verteilung von X und Y: (zur Berechnung siehe c)):

		Y			
		-1	0	1	$f_X(x_i)$
	-1	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{3}$
X	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$
	1	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$
	$f_Y(y_j)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

f) Berechnung der Kovarianz:

$Cov(X,Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j) - \mu_x \cdot \mu_y$

$Cov(X,Y) = -1(-1)\frac{2}{5} + 1(-1)\frac{2}{15} + 1(-1)\frac{2}{15} - (-\frac{1}{2})^2 = -0,11667 \neq 0$

g) Die Tatsache, dass die Kovarianz von X und Y ungleich Null ist, impliziert, dass die beiden ZV stochastisch abhängig sind. Eine Kovarianz von Null würde jedoch umgekehrt keine Unabhängigkeit implizieren!

Die stochastische Abhängigkeit ergibt sich daraus, dass die Ziehung ohne Zurücklegen durchgeführt wurde.

Rechnerisch (war in der Aufgabe nicht gefragt) lässt sich dies auch zeigen:

1. Weg: Zufallsvariablen X und Y heißen stochastisch unabhängig, wenn die gemeinsame Massenfunktion gleich dem Produkt der beiden Randverteilungen ist:

$f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$

Bsp: $f(X=-1) \cdot f(Y=-1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \neq f(X=-1, Y=-1)$

2. Weg: Über die bedingten Verteilungen

Bsp: $f(Y=-1|X=-1) \neq f(Y=-1)$

Aufgabe Z2:

$Var(X_1) = 1, Var(X_2) = 4, Cov(X_1, X_2) = 1$

A) Die Antwort ist richtig.

$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2) = 1 + 4 + 2 \cdot 1 = 7$

B) Die Antwort ist richtig.

$Var(X_1 - X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) - 2Cov(X_1, X_2) = 1 + 4 - 2 \cdot 1 = 3$

C) Die Antwort ist falsch.

$Var(2X_1 - 3X_2) = Var(2X_1) + Var(3X_2) - 2Cov(2X_1, 3X_2) = 4Var(X_1) + 9Var(X_2) - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 28 \neq 1$

D) Die Antwort ist falsch.

$Var(6X_2 - 2X_1) = Var(6X_2) + Var(2X_1) - 2Cov(6X_2, 2X_1) = 36Var(X_2) + 4Var(X_1) - 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 = 124 \neq 5$

E) Da A und B richtig waren, ist E falsch.

Aufgabe Z3:

$$K(x) = 1200 + 70x - 2x^2$$

$$G(x) = -1200 + 80x + 2x^2$$

a) Der Break-Even-Point bezeichnet die Absatzmenge x, für die der Gewinn gerade Null ist.

$$-1200 + 80x + 2x^2 = 0$$

Über pq-Formel oder Mitternachtsformel erhalten wir (die negative Lösung ist hier nicht möglich):

$$x_{BE} = 11,62$$

b) Die Nachfrage X ist eine stetige, gleichverteilte Zufallsvariable, mit $6 \leq x \leq 17$. Damit muss der Wert der Dichtefunktion über dem gesamten Intervall $\frac{1}{11}$ betragen, damit die Fläche unterhalb der Dichtefunktion 1 ist.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{11} & \text{für } 6 \leq x \leq 17 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_6^{17} f(x)x\,dx = \int_6^{17} \frac{1}{11}x\,dx = \left[\frac{1}{22}x^2\right]_6^{17} = 11,5$$

Für die Quantile ist es sinnvoll, zuerst die Verteilungsfunktion zu berechnen:

$$F(x) = \int_6^x \frac{1}{11}\,dx = \frac{1}{11}x - \frac{6}{11}$$

Median der Absatzmenge(aufgrund der symmetrischen Verteilung gleich dem Erwartungswert):

$$F(x) = 0,5$$

$$\frac{1}{11}x - \frac{6}{11} = 0,5$$

$$x_{0.5} = 11,5$$

90-Prozent-Quantil der Absatzmenge:

$$F(x) = 0,9$$

$$\frac{1}{11}x - \frac{6}{11} = 0,9$$

$$x_{0.9} = 15,9$$

c) Damit der Gewinn nicht negativ ist, muss das Unternehmen mindestens 11,62 Einheiten verkaufen (siehe a):

$$P(G(X) \geq 0) = P(X \geq 11,62) = 1 - P(X \leq 11,62) = 1 - F(11,62) = 0.489$$

Die Wahrscheinlichkeit, keinen Verlust zu machen, beträgt 48,9 Prozent.

d)

$$G(E(X)) = -15,5$$

$$G(x_{0.9}) = 577,62$$

e) und f) G(x) ist keine Dichtefunktion, da $\int_6^{17} G(x)\,dx \neq 1$. Deshalb können EW und Median nicht auf diesem Wege ausgerechnet werden.

G(x) ist eine nicht-lineare Transformation von x, d.h.

$$E(G(X)) \neq G(E(X))$$

$$E(G(X)) = E(-1200 + 80X + 2X^2) = -1200 + 80E(X) + 2E(X^2)$$

$$= -1200 + 80E(X) + 2\int_6^{17} \frac{1}{11}x^2\,dx = 4,667$$

oder:

$$E(G(X) = \int_6^{17} G(x)f(x)\,dx = \int_6^{17} (-1200 + 80X + 2X^2)\frac{1}{11}\,dx$$

$$= \frac{1}{11}\left[-1200x + 40x^2 + \frac{2}{3}x^3\right]_6^{17}$$

$$= \frac{1}{11}\left[-1200 \cdot 17 + 1200 \cdot 6 + 40 \cdot 17^2 - 40 \cdot 6^2 + \frac{2}{3} \cdot 17^3 - \frac{2}{3} \cdot 6^3\right] = 4,667$$

und damit:

$$E(G(X)) > G(E(X))$$

Der Erwartungswert des Gewinns ist positiv. Zwar ist die Wahrscheinlichkeit, Verlust zu machen, größer als die Wahrscheinlichkeit, Gewinn zu machen (siehe c). Wenn aber ein Gewinn gemacht wird, ist dieser ziemlich hoch: aufgrund des quadratischen Terms in der Gewinnfunktion steigt der Gewinn bei steigender Absatzmenge überproportional an. Deshalb können wir im Mittel einen positiven Gewinn erwarten.

Bezüglich des Medians gilt:

$$G(x_{0.5}) = G(x)_{0.5}$$

Der Median von X beträgt $x_{0.5} = 11,5$, d.h. in 50 Prozent der Fälle werden 11,5 TSD Jacken oder weniger verkauft. Dies entspricht einem Gewinn von $G(x_{0.5}) = -15,5$ TSD Euro. Da G(x) im betrachteten Intervall eine monoton steigende Funktion von x ist (mehr Absatz=mehr Gewinn), gilt auch: in 50 Prozent der Fälle wird ein Gewinn von -15,5 TSD Euro oder weniger gemacht.

→ Der Gewinn des Medians ist also zugleich der Median des Gewinns.

→ Dasselbe gilt für das 90-Prozent-Quantil.

→ Mit anderen Worten: G(X) ist zwar eine nicht-lineare, aber eine monotone Transformation von X, d.h. die Rangfolge wird nicht verändert.

g) Für die Markteinführung spricht, dass der Erwartungswert des Gewinns positiv ist, d.h. im Mittel ist zu erwarten, dass die Gewinne die Verluste überkompensieren. Wenn allerdings der Unternehmer sehr risikoavers ist, könnte er trotz positivem Erwartungswert die möglichen Verluste scheuen.