Übungsblatt 8 - Lösungen zu den Z-Aufgaben

Aufgabe Z1:

Ereignis A: die Sendung wird angenommen.

a) 0 schadhafte Stücke: $P(A) = 1$, trivial.

Nach dem Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Schira, S. 239 ff.):

2 schadhafte Stücke:

$P(A) = \frac{48}{50}\frac{47}{49}\frac{46}{48}\frac{45}{47} = 0,8449$

5 schadhafte Stücke:

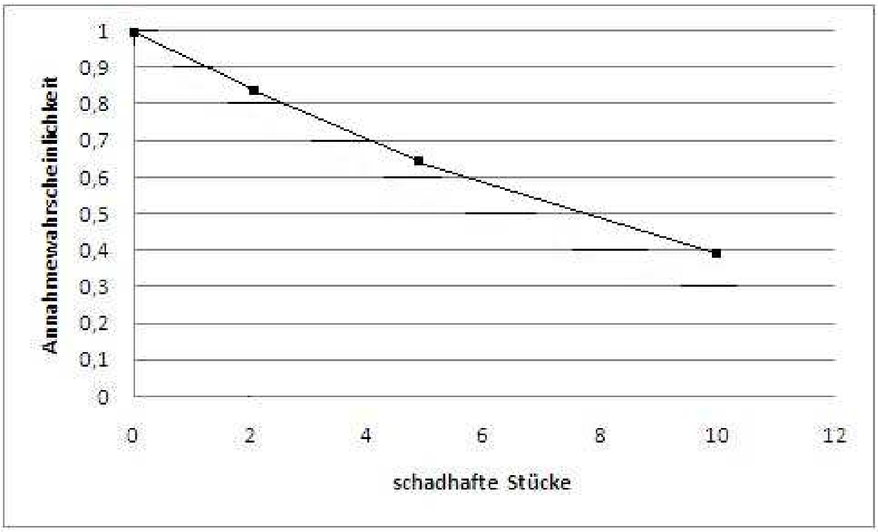
$P(A) = \frac{45}{50}\frac{44}{49}\frac{43}{48}\frac{42}{47} = 0,6470$

10 schadhafte Stücke:

$P(A) = \frac{40}{50}\frac{39}{49}\frac{38}{48}\frac{37}{47} = 0,3968$

Je mehr schadhafte Stücke in der Sendung sind, desto kleiner ist die Annahmewahrscheinlichkeit.

b) Grafische Darstellung der Annahmewahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von der tatsächlichen schadhaften Stücken ("Operationscharakteristik" des Inspektionsplanes Ip4).



c) Inspektionsplan Ip6:

0 schadhafte Stücke: $P(A) = 1$, trivial.

2 schadhafte Stücke:

$P(A) = \frac{48}{50}\frac{47}{49}\frac{46}{48}\frac{45}{47}\frac{44}{46}\frac{43}{45} = 0,7722$

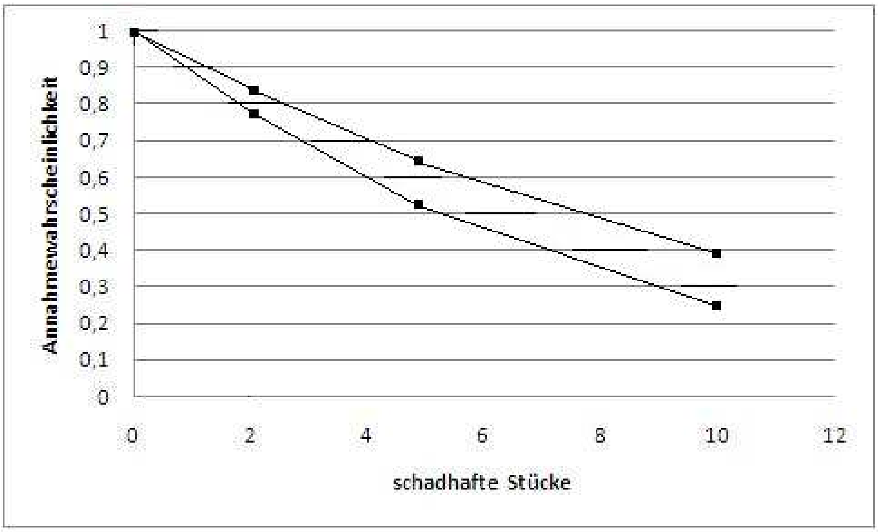
5 schadhafte Stücke:

$P(A) = \frac{45}{50}\frac{44}{49}\frac{43}{48}\frac{42}{47}\frac{41}{46}\frac{40}{45} = 0,5127$

10 schadhafte Stücke:

$P(A) = \frac{40}{50}\frac{39}{49}\frac{38}{48}\frac{37}{47}\frac{36}{46}\frac{35}{45} = 0,2415$

Operationscharakteristik des Inspektionsplanes Ip6:



Der Graph der Operationscharakteristik von Ip6 verläuft vollständig unter dem Graphen von Ip4.

Aufgabe Z2:

Die maximale Augensumme bei vier Würfen beträgt 24. Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass die Augensumme nach vier Würfen größer als 19 ist, müssen zunächst die Anzahl der Permutationen für jede Augensumme, die größer als 19 ist, berechnet und aufsummiert werden. Dies ergibt die Anzahl der günstigen Ausgänge. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann aus der Anzahl der günstigen Ausgänge gemessen an der Anzahl der möglichen Ausgänge.

Anzahl der möglichen Permutationen, wenn die Augensumme > 19 beträgt:

Hierfür ist Formel (7-9) aus dem Schira zu verwenden. Diese Formel berechnet die Anzahl der möglichen Permutationen von n Elementen, falls nicht alle n Elemente verschieden sind. (Es werden m Gruppen gleicher Elemente gebildet; die Gruppe i enthalte $n_i >= 1$ Elemente, so dass $n = n_1 + n_2 + .. + n_m$.)

$$\boxed{{}_nP_{n_1,\ldots,n_m} = \frac{n!}{n_1! \cdot (n_2!) \cdot (\ldots) \cdot (n_m!)}}$$

1. **Augensumme=24**

   6+6+6+6 $\rightarrow$ 1 Permutation

2. **Augensumme=23**

   6+6+6+5
   6+6+5+6
   6+5+6+6
   5+6+6+6
   $\rightarrow$ 4 Permutationen

   3 mal 6, 1 mal 5
   ${}_4P_{3,1} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$

3. **Augensumme=22**

   6+6+6+4
   6+6+4+6
   ...
   3 mal 6, 1 mal 4
   ${}_4P_{3,1} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$

   6+6+5+5
   6+5+5+6
   ...
   2 mal 6, 2 mal 5
   ${}_4P_{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

4. **Augensumme=21**

   3 mal 6, 1 mal 3 $\rightarrow$ 4 Permutationen
   2 mal 5, 1 mal 3 , 1 mal 4 $\rightarrow$ 12 Permutationen
   1 mal 6, 3 mal 5 $\rightarrow$ 4 Permutationen

5. **Augensumme=20**

   4 mal 5 $\rightarrow$ 1 Permutationen
   3 mal 6, 1 mal 2 $\rightarrow$ 4 Permutationen
   2 mal 6, 2 mal 4 $\rightarrow$ 6 Permutationen
   1 mal 6, 2 mal 5, 1 mal 4 $\rightarrow$ 12 Permutationen
   2 mal 6, 1 mal 5, 1 mal 3 $\rightarrow$ 12 Permutationen

Folglich gibt es insgesamt 1+4+4+4+12+4+1+4+6+12+12+6= 70 günstige Permutationen.

Die Anzahl der möglichen Permutationen beträgt $6^4 = 1296$.
Mithilfe der **Laplaceschen Wahrscheinlichkeit** wird ausgerechnet:

$$P(A > 19) := \frac{70}{1296} = 0.054$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach vier Würfen die Augensumme größer als 19 ist, liegt bei 5,4 Prozent.

Aufgabe Z3:

a) $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$

Formel 9-3 und Formel 9-9a Schira
$E(X) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 2,5 \neq 2$

$\rightarrow$ falsch

b) $V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X)^2) \cdot P(X = x_i)$

Formel 9-3 und 9-16a
$V(X) = \frac{1}{4}[(1-2,5)^2 + (2-2,5)^2 + (3-2,5)^2 + (4-2,5)^2] = 1,25$
$\rightarrow$ richtig

c) Insgesamt gibt es 16 Elementarereignisse:

$$S = \begin{array}{llll} \{(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4)\} \end{array}$$

Z=0 wenn $x_i = y_i$
$\rightarrow$ 4 günstige Ereignisse
Laplacesche Wahrscheinlichkeit:
$P(Z = 0) = \frac{4}{16} = 0,25$
$\rightarrow$ richtig

d) Z=1 wenn $\mid x_i - y_i \mid = 1$
$\rightarrow$ 6 günstige Ereignisse
$P(Z = 1) = \frac{6}{16} = 0,375$
$\rightarrow$ falsch

e) Z=2 wenn $\mid x_i - y_i \mid = 2$
$\rightarrow$ 4 günstige Ereignisse
$P(Z = 2) = \frac{4}{16} = 0,25$
$\rightarrow$ richtig

A	B	C	D	E
	X	X		X