Lösung Übungsblatt 7 - Z-Aufgaben

Aufgabe Z1: Pascalsches Dreieck

Ausgangspunkt ist Formel (7-5): $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

(1) Definition Binomialkoeffizient:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1+1)!}$$

(2) Brüche erweitern:

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{n-k}{n-k} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k}{k}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \binom{n}{k} \text{ q.e.d.}$$

Erhöht man sowohl n als auch k der zu beweisenden Formel um die Zahl 1, so erhält man die Formel (7-5) aus dem Lehrbuch von Schira.

Aufgabe Z2:

Es gibt eine Urne mit insgesamt: 12 Kugeln *(n=12)*, davon sind 4 Kugeln weiß *(k=4)* und 8 Kugeln schwarz *((n-k)=8)*. Wie viele mögliche Anordnungen gibt es?

Beachte: man kann nicht zwischen gleichfarbigen Kugeln unterscheiden; geht man grundsätzlich davon aus, dass 12 Plätze zu vergeben sind *(es sind ja 12 Kugeln in der Urne)* so gibt es 12! Möglichkeiten; dabei zählt man aber zu viele Möglichkeiten; man muss noch um die nicht unterscheidbaren Anordnungen korrigieren - es geht hier um eine Kombination ohne Anordnung (ohne Reihenfolge)

Man stelle sich folgende Anordnung vor - erst 4 weiße und dann die 8 schwarzen Kugeln (der Fokus liegt zunächst auf den weißen Kugeln):

wwww*ssssssss*

Wären die weißen Kugeln nummeriert *(also unterscheidbar)* so gäbe es 4! Möglichkeiten diese auf den ersten Plätze zu platzieren; es ist aber nur eine unterscheidbare Anordnung dieser Art zu zählen und nicht 24 (= 4!); das gleiche gilt für die 8 schwarzen Kugeln - es muss um den Faktor 8! korrigiert werden

$$\boxed{\text{Kombination ohne Anordnung:} \quad {}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nV_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

Lösung: $\binom{12}{4} = \frac{12!}{4!8!} = 495$ Möglichkeiten

Denkt man im sich im nächsten Schritt eine weitere Farbe dazu, kommt man automatisch zu der Formel der Permutation mit Wiederholung. Der Fall mit zwei Farben stellt demnach einen Spezialfall dar, bei dem sich die beiden Formeln entsprechen.

Aufgabe Z3:

$Gastnummer$	Tag	$Monat$	$Summe(Tag + Monat)$	$kumulierteSumme$
1	1	1	2	2
2	2	1	3	5
3	1	2	3	8
4	2	2	4	12
5	1	3	4	16
6	3	1	4	20
7	2	3	5	25
8	3	2	5	30
9	1	4	5	35
10	4	1	5	40

Die höchstmögliche Anzahl an Partygästen beträgt 9. Beginnend mit den Geburtstagen,welche die kleinsten Summen ergeben (1.1., 2.1., etc.)werden alle Möglichkeiten notiert und die Gesamtsumme errechnet. Bei 10 Partygästen wäre die Summe von 35 bereits überschritten.