

Hauptklausur STATISTIK

Name, Vorname: _____

Matrikel-Nr. _____

Die Klausur enthält zwei Typen von Aufgaben:

Teil A besteht aus Fragen mit mehreren vorgegebenen Antwortvorschlägen, von denen mindestens eine Antwort richtig ist und von denen mehrere Antworten richtig sein können. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten in den Kästchen unterhalb der Aufgabe an. Sie erhalten 1 Pluspunkt für jeden korrekt ausgewählten Antwortvorschlag (richtiger Antwortvorschlag wird ausgewählt bzw. nicht zutreffender Antwortvorschlag wird nicht ausgewählt). Sie erhalten 1 Minuspunkt für jeden falsch ausgewählten Antwortvorschlag (richtiger Antwortvorschlag wird nicht ausgewählt bzw. nicht zutreffender Antwortvorschlag wird ausgewählt). Es werden keine negativen Punktzahlen vergeben, Sie erhalten also für jede Aufgabe mindestens 0 Punkte. Diese Rohpunkte werden noch gewichtet, um die Klausurpunkte zu berechnen, die in die Berechnung der Prüfungsleistung eingehen. Das Gewicht ist $3/4$ bei 4 Antwortmöglichkeiten und $3/5$ bei 5 Antwortmöglichkeiten.

Teil B enthält ausführlich zu lösende Aufgaben. Nur mit der Darstellung der einzelnen Rechenschritte kann die volle Punktzahl erreicht werden.

Zulässige Hilfsmittel: Nicht programmierbarer Taschenrechner, Lehrbuch von Schira, eine handschriftlich von Ihnen selbst beschriebene Seite im DIN A4 Format ("Spickzettel", kann auf beiden Seiten beschrieben sein).

Teil A umfasst 8 Aufgaben und Teil B umfasst 4 Aufgaben. Bitte überprüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplars.

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Die in dieser Klausur maximal zu erreichende Punktzahl ist 60, davon können maximal 24 Klausurpunkte in Teil A und maximal 36 Punkte in Teil B erreicht werden.

Die Prüfungsleistung in Statistik ergibt sich auf Basis der erzielten Gesamtpunktzahl, die sich als Summe der in allen Prüfungsteilen erzielten (Klausur-)Punkte errechnet. Die erreichte Gesamtpunktzahl in der Zwischenklausur Statistik geht mit dem Gewicht 25% in die Gesamtpunktzahl der Prüfungsleistung ein.

Auswertung – Teil A

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
Erreichte (Klausur-)Punktzahl								

Auswertung – Teil B

Aufgabe	1	2	3	4
Erreichte Punktzahl				

Erreichte Gesamtpunktzahl

Teil A (24 Punkte)

A.1 Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- A) Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable, $F(x)$, gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Zufallsvariable den Wert x überschreitet.
- B) Die Verteilungsfunktion $F(x)$ ist immer eine stetige Funktion.
- C) Die empirische Verteilungsfunktion $H(x)$ entspricht
$$H(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I(x_i \leq x)$$
 für eine Stichprobe der Größe n mit Beobachtungen x_1, x_2, \dots, x_n .
- D) Die Aussagen A) bis C) sind falsch.

A	B	C	D
		X	

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit 3/4 gewichtet.

A.2 Welche der folgenden Aussagen zur Berechnung eines Preisindex treffen zu?

- A) Der dem Laspeyres-Preisindex in Deutschland zugrunde liegende Warenkorb wird jährlich aktualisiert.
- B) Der dem Paasche-Preisindex zugrunde liegende Warenkorb wird in jeder Periode aktualisiert.
- C) Zur Berechnung der wahrgenommenen (gefühlten) Inflation durch das Statistische Bundesamt wird eine repräsentative Stichprobe von Konsumenten danach befragt, wie sich die Preise beim Einkauf verändern.
- D) Bei der Messung der wahrgenommenen (gefühlten) Inflation durch das Statistische Bundesamt werden die Preismesszahlen mit den Kaufhäufigkeiten anstelle der Ausgabenanteile des Laspeyres-Preisindex gewichtet.

A	B	C	D
	X		X

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit 3/4 gewichtet.

A.3 Betrachten Sie folgende Stichprobe der Punktezahlen p_{Mi} männlicher Studierender der Nachklausur in Ökonometrie:

i	1	2	3	4	5
p_{Mi}	22	29	42	42	46

A) $\sum_{i=1}^5 p_{Mi} = 181$

B) Standardabweichung: $s_{P_M} = 9,1$ (auf eine Nachkommastelle gerundet)

C) 30%-Quantil: $p_{M[0,3]} = 29$

D) 85%-Quantil: $p_{M[0,85]} = 46$

A	B	C	D
X	X	X	X

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit $3/4$ gewichtet.

A.4 Es treffen sich die Regierungschefs der vier Länder A, B, C und D. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

A) Die vier Regierungschefs können auf 24 Arten in einer Reihe Platz nehmen.

B) Da der Regierungschef von D nicht neben dem Regierungschef von A sitzen kann, können die vier Regierungschefs auf 12 Arten in einer Reihe Platz nehmen.

C) Es gibt 6 Sitzordnungen, wie die vier Regierungschefs im Kreis auf vier Stühlen an einem runden Tisch Platz nehmen können. Hierbei kommt es nur darauf an, wer auf welcher Seite neben wem sitzt, nicht aber, auf welchem Stuhl ein Regierungschef sitzt.

D) Da der Regierungschef von D nicht neben dem Regierungschef von A sitzen kann, gibt es nur zwei Sitzordnungen, wie die vier Regierungschefs auf vier Stühlen an einem runden Tisch Platz nehmen können. Hierbei kommt es nur darauf an, wer auf welcher Seite neben wem sitzt, nicht aber, auf welchem Stuhl ein Regierungschef sitzt.

A	B	C	D
X	X	X	X

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit $3/4$ gewichtet.

A.5 Gegeben sei die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung der beiden diskreten Zufallsvariablen X und Y:

	y_1	y_2
x_1	0,2	0,15
x_2	0,25	0,1
x_3	0,08	0,22

- A) $f_X(x_1) = 0,3$
- B) $f_Y(y_1|x_2) = 0,25$
- C) Die bedingte Verteilung von Y gegeben $X = x_1$ ist symmetrisch.
- D) X und Y sind stochastisch unabhängig.
- E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

A	B	C	D	E
				X

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit 3/5 gewichtet.

A.6 Ein Spieler würfelt mit einem fairen Würfel viermal hintereinander. Seien X_i die gewürfelte Zahl im i-ten Wurf ($i = 1, 2, 3, 4$) und $Z = \sum_{i=1}^4 X_i$ die Augensumme der vier Würfe.

- A) $E(X_i) = 3,5$
- B) $E(Z) = 14$
- C) $P(Z = 1) = 0$
- D) $P(Z \geq 23) = 0,0039$ (auf vier Nachkommastellen gerundet).

A	B	C	D
X	X	X	X

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit 3/4 gewichtet.

A.7 Zwei Zufallsvariablen haben die Varianzen $Var(X_1) = 16$ und $Var(X_2) = 4$. Die Kovarianz sei $Cov(X_1, X_2) = 1$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- A) $Var(5X_1) = 400$
- B) $Var(X_1 + 2) = 18$
- C) $Var(X_1 + X_2) = 22$
- D) $Var(X_1 - X_2) = 18$
- E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

A	B	C	D	E
X		X	X	

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit 3/5 gewichtet.

A.8 X_1 sei Poisson(3) verteilt und X_2 sei Poisson(5) verteilt. X_1 und X_2 sind statistisch unabhängig. Weiter sei $Y = X_1 + X_2$.

- A) $E(X_1) = 5$
- B) $E(Y) = 9$
- C) $Var(Y) = 8$
- D) $P(2 \leq X_2 \leq 4) < 0,2$
- E) Die Antworten A) bis D) sind falsch.

A	B	C	D	E
		X		

Zur Berechnung der Klausurpunkte werden die in dieser Aufgabe erzielten Rohpunkte mit 3/5 gewichtet.

Teil B (36 Punkte)

B.1 a) Beweisen Sie die Formel

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1}.$$

Erläutern Sie jeden Beweisschritt.

(3 Punkte)

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Formel unter a) und dem Pascalschen Dreieck? Erläutern Sie präzise diesen Zusammenhang für die Ableitung der Koeffizienten in der binomischen Formel für $(a+b)^3$ auf Basis der Koeffizienten in der binomischen Formel für $(a+b)^2$.

(3 Punkte)

(6 Punkte)

B.2 Ihnen liegen in Excel Lohnbeobachtungen w_i für 300 weibliche Beschäftigte und 400 männliche Beschäftigte in einer Branche vor. Der Branchenverband beauftragt Sie mit einer statistischen Analyse der geschlechtsspezifischen Lohnunterschiede. Entwickeln Sie ein Konzept zur Durchführung dieser Analyse und erläutern Sie kurz, wie Sie dieses Konzept in Excel umsetzen würden. Ihr Konzept sollte unter anderem eine Varianzzerlegung und eine Analyse der Differenzen der Quantile der logarithmierten Löhne umfassen.

Hinweis: Eine detaillierte Beschreibung der Formeln in Excel ist nicht notwendig. Der Umfang Ihrer Antwort sollte im Lichte der für diese Aufgabe vorzusehenden Bearbeitungszeit angemessen sein.

(12 Punkte)

B.3 Bei einer Gewichtskontrolle von 1-kg-Paketen Zucker wurde festgestellt, dass das Gewicht X normalverteilt ist mit $\mu = 1,015$ und $\sigma = 0,01$. Es gilt also $X \sim N(1,015; 0,0001)$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X in ein beidseitiges Zwei-Sigma-Intervall um μ fällt, also wie groß ist $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$? (1 Punkt)

b) Wieviel Prozent der Pakete wiegen höchstens 999 g? (1 Punkt)

c) Wieviel Prozent der Pakete wiegen mindestens 1 kg? (1 Punkt)

d) Welches Gewicht unterschreiten die 9% leichtesten Pakete gerade?
Hinweis: Nehmen Sie den nächsten Tabellenwert, anstatt zu interpolieren. (1 Punkt)

e) Sie kaufen drei Pakete Zucker ein. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie insgesamt mehr als 3 kg Zucker erworben haben? Unterstellen Sie statistische Unabhängigkeit. (1 Punkt)

(5 Punkte)

- B.4 Ein großes Unternehmen plant einen neuen Wintersportartikel, die Jacke Skibnitz, zum Preis von 200 Euro auf den Markt zu bringen. Wegen hoher Fixkosten und der Kostenersparnisse durch Massenproduktion geht man von der Kostenfunktion

$$K(x) = 1600 + 80x - 3x^2$$

aus, wobei $K(x)$ die Kosten in Tausend Euro und x die Ausbringung in Tausend Stück sind. Der Gewinn $G(x)$ hängt von x wie folgt ab:

$$G(x) = -1600 + 120x + 3x^2$$

Hinweis: Diese Aufgabe orientiert sich am Praxisbeispiel zu Kapitel 9 im Lehrbuch von Schira.

- a) Für welche Ausbringungsmenge x_0 ist der Gewinn $G(x_0)$ gleich null? x_0 ist der sogenannte Breakeven-Point.

Hinweise:

- x_0 kann nur positiv sein.
- Die Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

(1,5 Punkte)

- b) Eine Marktstudie ermittelt, dass X , die Nachfrage nach der Jacke Skibnitz bei einem Preis von 200 Euro, stetig gleichverteilt zwischen 5 Tausend und 15 Tausend Stück ist. Berechnen Sie Erwartungswert, Median und 95%-Quantil der Absatzmenge. Interpretieren Sie die drei berechneten Größen. (2 Punkte)

- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Verlust zu machen, d.h. $P(G(X) \leq 0)$. Verwenden Sie dazu das Ergebnis aus a). (1,5 Punkte)

- d) Berechnen Sie den Gewinn für den Median und für das 95%-Quantil der Absatzmenge. (2 Punkte)

- e) Bestimmen Sie den Median und das 95%-Quantil des Gewinnes. Welcher Zusammenhang besteht dabei zu den in d) erzielten Ergebnissen? Interpretieren Sie kurz die Ergebnisse im Vergleich. (2 Punkte)

- f) Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns. (2 Punkte)

- g) Würden Sie dem Unternehmen empfehlen, die Jacke Skibnitz zu produzieren und zum Preis von 200 Euro auf den Markt zu bringen? Begründen Sie Ihre Antwort und orientieren Sie sich an den in a) bis f) erzielten Ergebnissen. (2 Punkte)

(13 Punkte)

Ende der Klausur