Übungsblatt 7

Die mit z) gekennzeichneten Aufgabenteile sind in Gruppenarbeit zu lösen und im Rahmen des Hausaufgabenwettbewerbs am Lehrstuhl abzugeben. Die Lösungen für diese Aufgabenteile werden nach dem Abgabetermin ins Netz gestellt.

Aufgabe 1:

Sie sollen für einen Betrieb aus den Verkaufszahlen der letzten 10 Monate folgende Preis-Absatz-Funktion durch die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate schätzen:

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 p_t$$

x_t = monatliche Absatzmenge in 1000 Stk

p_t = durchschnittlicher Preis des Gutes in Euro je Monat

Zur Durchführung der Schätzung sind folgende Zahlenwerte gegeben:

$$\bar{x} = 29 \text{ Tsd. Stück}$$

$$\bar{p} = 15 \text{ Euro}$$

$$\sum_{t=1}^{10} x_t^2 = 10910$$

$$\sum_{t=1}^{10} x_t p_t = 2850$$

$$s(p) = 10$$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die inverse Matrix C:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

Leiten Sie den KQ-Schätzer $\hat{\beta}$ für die einfache lineare Regression in Matrixschreibweise her.

Aufgabe 4:

Gegeben ist folgendes Modell:

$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_t$, bei dem folgende Werte bekannt sind:

$$X'X = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 \\ 7 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad X'y = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

- Wie groß ist der Stichprobenumfang T?
- Welchen Wert hat das arithmetrische Mittel der endogenen Variablen y?
- Ermitteln Sie die Schätzwerte für β nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Aufgabe 5:

Aus den 20 Beobachtungen zum Modell

$$Y = \alpha + \beta X + U,$$

in dem die Störvariablen unabhängig und mit Nullerwartung und gleicher Varianz normalverteilt sind, wurden folgende Werte berechnet:

$$\begin{aligned} \sum y_i &= 21,9; & \sum (x_i - \bar{x})^2 &= 215,4; & \sum x_i &= 186,2 \\ \sum (y_i - \bar{y})^2 &= 86,9; & \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) &= 106,4 \end{aligned}$$

- a) Berechnen Sie die Kleinst-Quadrate-Schätzungen für α und β .
- b) Wie lauten die Matrizen $X'X$ und $X'y$?

Es sei nun $e'e = 34,3255$.

- c) Wie groß ist die Residualvarianz? Geben Sie eine erwartungstreue Schätzung für die Varianz der latenten Variablen.
- d) Welche Standardabweichungen haben die Parameterschätzungen?
- e) Berechnen Sie einen Schätzwert für Y bei $X = 10$. Wie hoch schätzen Sie seine Standardabweichung? Benutzen Sie dazu Formel (10-18).

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 17; Aufg. 17.5)

Aufgabe 6:

Zur Schätzung des Regressionsmodells

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + U$$

liegen drei Zeitreihen mit jeweils zehn Beobachtungen vor. Folgende Zwischenergebnisse sind schon ausgerechnet worden:

$$\begin{aligned} \sum y_t &= 20; & \sum x_{1t} &= 30; & \sum x_{2t} &= 40 \\ \sum y_t^2 &= 88,2; & \sum x_{1t}^2 &= 92; & \sum x_{2t}^2 &= 163 \\ \sum x_{1t}y_t &= 59; & \sum x_{2t}y_t &= 88; & \sum x_{1t}x_{2t} &= 119 \end{aligned}$$

- a) Stellen Sie die Matrizen $X'X$ und $X'y$ zusammen. Wie lauten die Normalgleichungen dazu in Matrixschreibweise?
- b) Inventieren Sie die Matrix $X'X$.
- c) Schätzen Sie die Parameter.

Damit und mit den hier nicht angegebenen Beobachtungswerten erhalten Sie die Skalarprodukte $y'y = 88,2$ und $\hat{y}'\hat{y} = 63$.

- d) Berechnen Sie $e'e$. Berechnen Sie R^2 und auch das bereinigte Bestimmtheitsmaß.

- e) Fertigen Sie eine erwartungstreue Schätzung der Störvarianz an, und notieren Sie die geschätzte Varianz-Kovarianz-Matrix.
- f) Testen Sie mit der Faustregel die Hypothese $\beta_2 = 0$.

Aufgabe Z1:

Aus den Daten der ersten 10 Monate eines Jahres soll der Controller eines Betriebes eine lineare Kostenfunktion schätzen.

$$K_t = K_f + k_v x_t$$

K_t = Gesamtkosten in 1000 Euro

K_f = fixe Kosten pro Monat in 1000 Euro

k_v = variable Stückkosten in Euro/Stück

x_t = Ausbringungsmenge in 1000 Stück

Das Datenmaterial liegt wie folgt vor:

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t	5	7	7,5	9	7	6	8	8,5	9	8
K_t	247	269	279	306	280	257	291	321	316	284

Ermitteln Sie die geschätzte Kostenfunktion für den Controller.

Aufgabe Z2:

Inverse Matrix. Gehen Sie von der in Abschnitt 17.3 angegebenen Matrix $X'X$ für den Fall $k = 1$ aus.

- a) Invertieren Sie die Matrix $X'X$ in allgemeiner Rechnung.
- b) Zeigen Sie, dass die Determinante von $(X'X)/n$ gerade gleich der Varianz der exogenen Beobachtungswerte ist.

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 17; Aufg. 17.1)

Aufgabe Z3:

Orthogonalität. Prüfen Sie nach, ob im Beispiel [10] die Orthogonalitäten $X'e = 0$ und $y'e = 0$ gewährleistet sind. (Aufgabe aus Schira, Kapitel 17; Aufg. 17.4)

Aufgabe Z4:

Konstante Elastizitäten. Eine Nachfragefunktion nach einem Gut gibt die nachgefragte Menge Q eines Gutes in Abhängigkeit vom Preis P des Gutes und vom Einkommen Y der Nachfrager an. Oft verwendet man dazu die Form

$$Q = \beta_0 \cdot P^{\beta_1} \cdot Y^{\beta_2} \cdot U$$

- a) Linearisieren Sie diese Funktion so, dass sie mit der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden kann.
- b) Berechnen Sie von dieser Funktion die Preiselastizitäten und die Einkommenselastizitäten

$$\eta_p := \frac{\partial Q}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q} \quad \eta_y := \frac{\partial Q}{\partial Y} \cdot \frac{Y}{Q}$$

der Nachfrage. Welche Vorzeichen für die Parameterschätzungen sind im Normalfall zu erwarten?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 17; Aufg. 17.7)