

Übungsblatt 1

Die mit z) gekennzeichneten Aufgabenteile sind in Gruppenarbeit zu lösen und im Rahmen des Hausaufgabenwettbewerbs am Lehrstuhl abzugeben. Die Lösungen für diese Aufgabenteile werden nach dem Abgabetermin ins Netz gestellt.

Aufgabe 1:

Bestätigen Sie, dass für die Varianz der Augenzahl beim Würfelwurf gilt: $V(X) = 2,9166$.

Aufgabe 2:

Herr Kaiser verkauft durchschnittlich bei zwei von zehn Hausbesuchen eine Lebensversicherung. Er ist sehr fleißig und macht jeden Tag genau 16 Hausbesuche.

- a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Anzahl der pro Tag verkauften Lebensversicherungen.
- b) An wieviel % seiner Arbeitstage verkauft Herr Kaiser mehr als 10 Lebensversicherungen?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 11; Aufg. 11.3)

Aufgabe 3:

Druckfehler. Bevor es gedruckt wird, hat man bei jedem Buch sehr sorgfältig die Druckfehler auszumerzen versucht. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner Buchstabe falsch ist, ist sehr, sehr gering. Andererseits sind in so einem Buch sehr, sehr viele Buchstaben. So kommt es, dass der Erwartungswert der Anzahl der Druckfehler in einem Buch $\mu = 8$ ist.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Buch sechs oder mehr Druckfehler sind?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Buch genau 13 Druckfehler sind?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 11; Aufg. 11.7)

Aufgabe 4:

Die Zeitdauer, die ihr Server bei einer Internetanfrage mit einem Kunden beschäftigt ist, sei annähernd exponentialverteilt und betrage im Durchschnitt 4 Sekunden. Wie groß ist der Anteil der Anfragen, die mehr als 10 Sekunden Serverzeit benötigen?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 11; Aufg. 11.8)

Aufgabe 5:

Gewichtskontrolle. Bei einer Gewichtskontrolle von 1-kg-Paketen wurde festgestellt, dass das Gewicht normalverteilt ist mit $\mu = 1.01$ und $\sigma = 0.02$.

- a) Wieviel Prozent aller Pakete wiegen mindestens 1 kg?
- b) Jenseits welchen Betrages befinden sich die 6% schwersten Pakete?
- c) Wieviel % aller Pakete wiegen mindestens 1.020 kg?
- d) Warum ist der erste Satz dieser Aufgabe mit Sicherheit falsch?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 11; Aufg. 11.10)

Aufgabe 6:

Eine normalverteilte stochastische Variable X habe den Erwartungswert $\mu = 18$ und die Standardabweichung $\sigma = 4$.

- a) Die standardisierte Variable $Z = (X - 18)/4$ ist dann standardnormalverteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Variable Z zufällig in das Intervall von -1 bis +1 fällt? Bestimmen Sie

$$P(-1 < Z \leq +1) = P(-1 < (X - 18)/4 \leq +1).$$

- b) Geben Sie das entsprechende Intervall an, in welches die Zufallsvariable X mit eben dieser Wahrscheinlichkeit fällt.
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X in ein Intervall von +10 bis +26 fällt? Bestimmen Sie

$$P(10 < X \leq 26).$$

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 11; Aufg. 11.11)

Aufgabe 7:

Zwei-Sigma-Intervall. Wieviel Prozent der Wahrscheinlichkeitsmasse liegt innerhalb eines Zwei-Sigma-Intervalls $\mu \pm 2\sigma$ um den Erwartungswert, wenn die Zufallsvariable X

- a) normalverteilt ist mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$
- b) normalverteilt ist mit $\mu = 13$ und $\sigma = 4$
- c) binominalverteilt ist mit $n = 8$ und $p = 0.2$
- d) binominalverteilt ist mit $n = 16$ und $p = 0.5$

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 11; Aufg. 11.16)

Aufgabe 8:

Haushaltseinkommen. Das mittlere Jahreseinkommen aller Haushalte in einer Großstadt beträgt 32600€ bei einer Standardabweichung von 6200€. Eine Zufallsstichprobe mit 400 Haushalten wird entnommen.

- a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, in der Stichprobe ein mittleres Jahreseinkommen von über 32000€ vorzufinden?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Stichprobenmittelwert zwischen 32100€ und 33100€?
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Stichprobenmittelwert zwischen 32350€ und 32950€?
- d) Geben Sie, ohne zu rechnen oder statistische Tafeln zu benutzen, an, in welchem der folgenden drei Intervalle der Stichprobenmittelwert mit größerer Wahrscheinlichkeit liegen wird.

- (1) 32100€- 32300€
- (2) 32300€- 32500€
- (3) 32500€- 32700€

- e) Nun weist man Sie darauf hin, dass das Haushaltseinkommen sicher nicht normalverteilt ist, vielmehr eine deutliche Schiefe aufweist und stellt Ihre Ergebnisse zu a) bis d) in Frage. Wie begegnen Sie diesem Argument?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 12; Aufg. 12.5)

Aufgabe Z1:

Rechteckverteilung. Die im Intervall $[0, b]$ rechteckverteilte Zufallsvariable X hat den Erwartungswert $\mu = b/2$. Berechnen Sie die Varianz aus der Form

$$V(X) = \int_0^b x^2 \frac{1}{b} dx - \mu^2.$$

Zeigen Sie nun damit, dass die Formel (11-17) richtig ist, und benutzen Sie dazu die Rechenregel (9-19). (Aufgabe aus Schira, Kapitel 11; Aufg. 11.2)

Aufgabe Z2:

Man gebe mit Hilfe der TSCHEBYSCHEVschen Ungleichung

- a) eine Abschätzung dafür an, wie groß höchstens die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei zehn Münzwürfen weniger als zwei- oder mehr als achtmal Kopf fällt und
- b) vergleiche diese Abschätzung mit dem tatsächlichen Wert der fraglichen Wahrscheinlichkeit.

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 11; Aufg. 11.4)

Aufgabe Z3:

Eine normalverteilte stochastische Variable W habe den Erwartungswert $\mu = -5$ und die Standardabweichung $\sigma = 0.5$.

- a) Die transformierte Variable $U := (W + 5) \cdot 2$ ist somit standardnormalverteilt. In welches um den Nullpunkt symmetrisches Intervall fällt U mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%, 90%, 95% und 100% ?
- b) Geben Sie nun die um -5 symmetrischen Intervalle an, in die die Zufallsvariable W mit diesen Wahrscheinlichkeiten fällt.

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 11; Aufg. 11.12)

Aufgabe Z4:

Eine normalverteilte Zufallsvariable habe den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ .

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X in ein beidseitiges Zwei-Sigma-Intervall um μ fällt, also wie groß ist $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma)$?
- b) Wie groß ist $P(X \leq \mu + 2\sigma)$?
- c) Wie groß ist $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + \sigma]$

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 11; Aufg. 11.17)

Aufgabe Z5:

Stichprobenmittelwert. Die Verteilung eines metrischen Merkmals X in einer sehr großen Grundgesamtheit sei unbekannt. Jedoch wisse man, dass der Mittelwert 1700 sei und die Standardabweichung etwa 144 betrage. Nun ziehe man eine Stichprobe vom Umfang 200.

- a) Wie groß ist der Erwartungswert des Stichprobenmittelwertes?
- b) Wie groß ist die Standardabweichung des Stichprobenmittelwertes?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 12; Aufg. 12.2)