6. Regressionsanalyse

vgl. Regressionsrechnung als Instrument der deskriptiven Statistik (durchschnittlicher statistischer Zusammenhang): $y = a + bx$

➔ keine Gesetzmäßigkeit zwischen Variablen X und Y

Schließende Statistik: Zusammenhang aufdecken, schätzen und testen!

= Regressionsanalyse

Beobachtungswerte (x_i, y_i) = Stichprobe aus realer oder hypothetischer Grundgesamtheit

➔ Ökonometrie zur Überprüfung und Quantifizierung theoretisch ökonomischer Hypothesen

➔ erst geschätzte numerische Struktur erlaubt die Anwendung von Prognosen und Simulationen

6.1 Einfaches lineares Modell

= Aufdeckung von kausalen Abhängigkeiten zwischen beobachteten Größen (z.B. $D(X) = f(P)$, $K(X) = f(X)$), aber auch von anderen Variablen abhängig.

Daher Spezifikation der Variablen, die in ursächlicher Beziehung stehen:

Einfachster Fall:

$$Y = f(X)$$

d.h. Variable X beeinflusst Variable Y.

Festlegung der Funktionsform entsprechend der Theorie, jedoch meistens nur Vorgaben bzgl. des Vorzeichens der Steigung und des Achsenabschnittes
= Vielzahl von Funktionstypen

<u>Hier:</u> Linearer Modellansatz

➔ Geradengleichung: $Y(X) = \alpha + \beta X$

= funktionale Abhängigkeit drückt ökonomische Hypothese aus

Beispiele:

1. Keynesianische Konsumhypothese

   $C = \alpha + \beta Y^{verf}$ mit: $0 < \beta < 1$

   marginale Konsumneigung: $dC / dY^{verf} = \beta$

   autonomer Konsum: $\alpha > 0$ (einkommensunabhängiger Konsum)

2. Investitionsnachfrage

   $I(R) = \alpha + \beta R$ mit: $\alpha > 0, \beta < 0$

3. Produktionskosten eines Gutes als Funktion der Ausbringungsmenge

   $K(X) = \alpha + \beta X$ mit: $\beta > 0$ (*fixe* und *variable* Kosten)

Bestimmungsgründe in Beispielen nicht vollständig, aber nach Hypothese die wichtigsten Einflussfaktoren.

aber: auch Wirkung von anderen Einflüssen auf Y

➔ Modifizierung des ökonomischen Modells mit ökonometrischen Modellansatz durch Einfügen der Störvariablen U

$$Y(X) = \alpha + \beta X + U$$

U nimmt alle übrigen wichtigen Einflüsse auf

Spezifizierte Hypothese gilt dann auch für die Stichprobe:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

mit: y_i = endogene Variable oder Regressand,

x_i = exogene Variablen oder Regressoren,

u_i = latente Variable oder Störvariable

α und β = Modellparameter, Koeffizienten = wahre Werte der Parameter sind unbekannt und müssen geschätzt werden:

$\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ = Schätzer oder Schätzparameter

Schätzung kann Fehler aufweisen oder misslingen!

Latente Variablen u_i

Können nicht beobachtet werden und werden als Zufallsvariablen bzw. deren Realisationen aufgefasst = **stochastische Komponente** (stochastische Störung)

Begründungen:

- weitere, fehlende exogene Variablen
- Meßfehler
- Unvorhersagbare Zufälligkeiten im ökonomischen Verhalten

Wahrscheinlichkeitsverteilungen der latenten Variablen sind unbekannt; u_i sind unabhängig von Beobachtungswerten $(x_1,\ldots,x_n)$ und den Modellparametern $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$.

Es gilt:

1. $E(u_i) = 0$, für alle $i = 1, \dots, n$ ➔ keine systematischen Einflüsse

2. $V(u_i) = \sigma^2 = const.$, für alle i ➔ Varianz ist dieselbe für alle n (keine Heteroskedastie)

3. $Cov(u_i, u_{i'}) = 0$, für $i \neq i'$ ➔ keine Autokorrelation

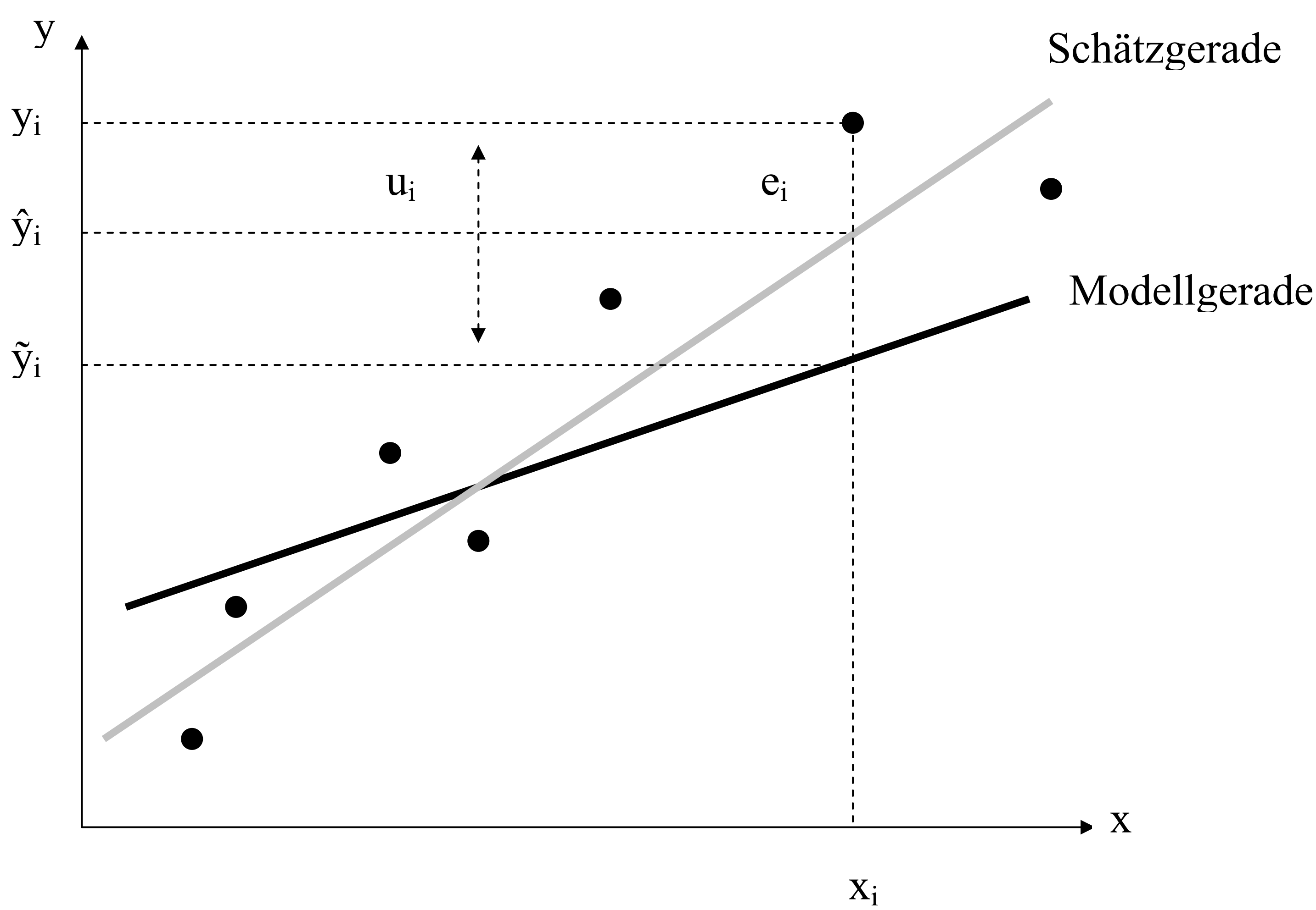
4. $u_i \sim N(0, \sigma)$ und unabhängig ➔ Störvariablen entstammen einer Normalverteilung und sich paarweise unabhängig

6.2 Schätzmethode der kleinsten Quadrate

Problem: Bestimmung der Schätzgeraden $\hat{\alpha} + \hat{\beta} x$, welche wahren, unbekannten Modellgeraden möglichst nahe kommt

Dabei ist zu unterscheiden zwischen:

- Beobachtungswerte: $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$
- theoretische Werte: $\tilde{y}_i = \alpha + \beta x_i$ spezifiziert nach ökonom. Theorie
- Schätzwerte: $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i$ liegen auf geschätzter Geraden



Quelle: Schira (2003), S. 541

1. **theoretische Werte:**

   nach im Modellansatz spezifizierter ökonomischer Theorie: $u_i = y_i - \tilde{y}_i$

2. **Schätzwerte:**

   Abweichungen von Beobachtungswerten heißen Residuen: $e_i = y_i - \hat{y}_i$

   (Berechnung nach der Schätzung)

Schätzprinzip der kleinsten Quadrate:

$$SQR = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2$$

Durch Lösen der Minimierungsaufgabe erhält man eindeutige Schätzformeln.

Quadratsumme SQR ist bei vorliegenden Beobachtungswerten x_i und y_i nur von der Lage der Schätzgeraden abhängig.

$$\sum_{t=1}^{n} e_i^2 = \sum (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2 = SQR(\hat{\alpha}, \hat{\beta} \,|\, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$$

Mit den partiellen Ableitungen von SQR:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}} SQR(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \sum 2(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\beta}} SQR(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \sum 2(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)(-x_i) = 0$$

Normalgleichungen

$$\sum (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i) = 0$$
$$\sum (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i) x_i = 0$$

$$\sum y_i - \hat{\alpha} n - \hat{\beta} \sum x_i = 0$$
$$\sum y_i x_i - \hat{\alpha} \sum x_i - \hat{\beta} \sum x_i^2 = 0$$

Division durch n erhält man:

$$\overline{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \overline{x}_i$$
$$\overline{y_i x_i} = \hat{\alpha} \overline{x}_i + \hat{\beta} \overline{x_i^2}$$

Man erhält die unbekannten Modellparameter:

$$\hat{\beta} = \frac{c_{XY}}{s_X^2}$$

$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x}$$

mit: $s_X^2 > 0$

Schätzung der Störvarianz (Varianz der latenten Variablen)

$\sigma_X^2 = \frac{1}{n}\sum u_i^2$ (erwartungstreu und konsistent)

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

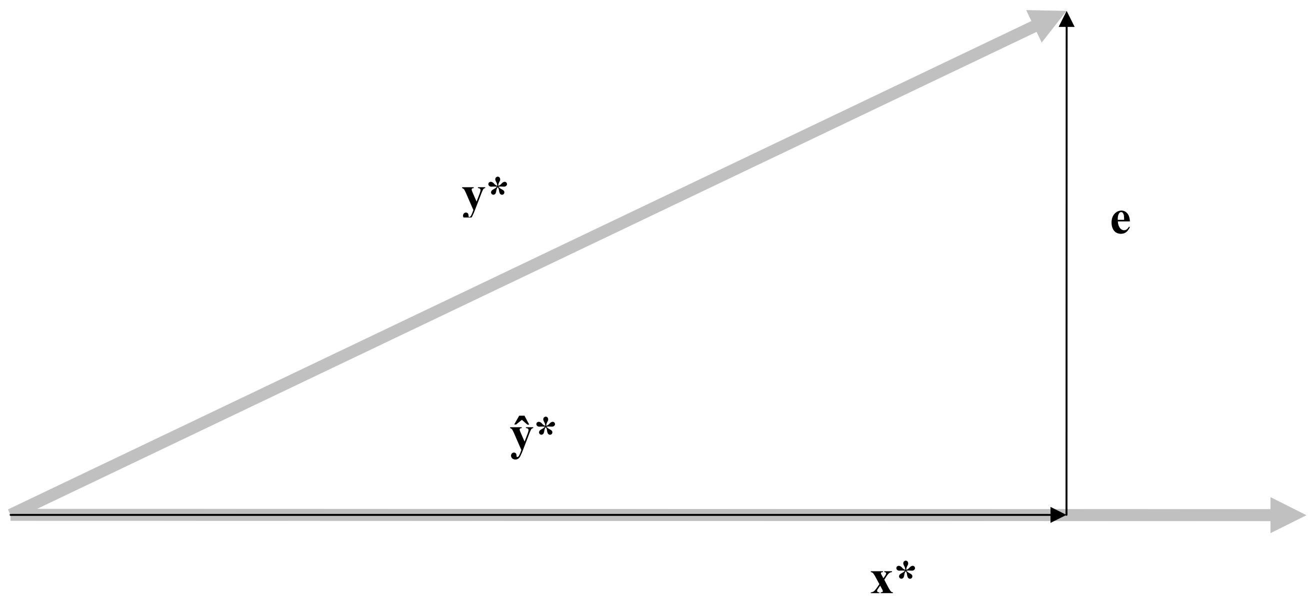
Algebraische Eigenschaften der KQ-Schätzer

➔ mittlere Gerade durch Punktwolke zur Minimierung der Residualvarianz

$(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i) = e_i$ in Normalengleichung

(1) Zentraleigenschaft der Regressionsgeraden: $\sum e_i = 0$

(2) Orthogonalität: $\sum e_i x_i = 0$; Vektor der Residuen und Vektor der exogenen Variablen stehen senkrecht aufeinander



Quelle: Schira (2003), S. 544

$$x_i^* := x_i - \overline{x}\,,\; y_i^* := y_i - \overline{y}\,,\; \hat{y}_i^* := \hat{y}_i - \overline{\hat{y}}\,,\ \text{so dass}\ \ y_i^* := \hat{\beta} x_i^* + e_i$$

Die Residuen haben keine Kovarianz, d.h. sind unkorreliert:

$$c_{EX} = \frac{1}{n}\sum e_i(x_i - \overline{x}) = \frac{1}{n}\sum e_i x_i = 0$$

Des Weiteren gilt:

$$\sum e_i \hat{y}_i = 0\,,$$

da Schätzwerte nur eine lineare Funktion der exogenen Variabeln sind.

$$y_i = \hat{y}_i + e_i$$
$$\sum y_i = \sum \hat{y}_i + \sum e_i$$
$$\sum y_i = \sum \hat{y}_i$$

➔ arithmetisches Mittel der Beobachtungswerte und der Schätzwerte stimmen überein.

Regressionsgerade geht durch den Schwerpunkt: $\bar{y} = \bar{\hat{y}}$

$$y_i^2 = (\hat{y}_i + e_i)^2$$
$$y_i^2 = \hat{y}_i^2 + e_i^2 + 2e_i\hat{y}_i$$
$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2 + 2\sum e_i\hat{y}_i$$

wegen Orthogonalität verschwindet letzter Summand:

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2$$

Varianzzerlegung (Division durch n und Subtraktion von $\bar{y}$):

$$s_Y^2 = s_{\hat{Y}}^2 + s_E^2$$

6.3 Multiple Lineare Regressionsanalyse

jetzt: Mehr als zwei Variablen bzw. mehr als eine unabhängige Variable, d.h.

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n) + U$$

bzw. in linearer Form:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n + U$$

<u>Beispiel:</u>

- gesamtwirtschaftlicher Konsum ist Funktion des verfügbaren Einkommens Y^{verf} und des Vermögens W.
- gesamtwirtschaftliche Geldnachfrage

Matrixschreibweise:

(Vorauss.: elementare Kenntnisse der Matrizenrechnung)

Merke: **große** fette Buchstaben für Matrizen

kleine fette Buchstaben für Spaltenvektoren

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ \\ y_n \end{pmatrix};\ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & \cdots & x_{k3} \\ \vdots & & & & \\ & & & & \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix};\ \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \\ \beta_k \end{pmatrix};\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ \\ u_n \end{pmatrix}$$

Multiples lineares Regressionsmodell:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & \cdots & x_{k3} \\ \vdots & & & & \\ & & & & \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

$\mathbf{X}$ mit $k+1$ Spalten für Absolutglied mit Einsen (Scheinvariable) und exogenen Variablen

Annahme:

Wahrscheinlichkeitsverteilung latenter Variablen $\mathbf{u}$ unabhängig von Beobachtungswerten $\mathbf{X}$ und Modellparametern.

Für Momente von $\mathbf{u}$ gilt:

$E(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ (d.h. Spaltenvektor mit N Nullen)

$$E(\mathbf{uu}') = \sigma^2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix}, \text{ (Hauptdiagonale mit Varianzen)}$$

mit $\mathbf{I}$ als $(n \times n)$-Einheitsmatrix und

- Annahme von Homoskedastizität ($\sigma^2 = const.$) der latenten Variablen sowie
- Abwesenheit von Autokorrelation (Kovarianzen sind Null)

- Störvariablen sind unabhängig und normalverteilt

<u>Eigenschaften der Beobachtungswerte</u> in Matrix $\mathbf{X}$:

$\mathbf{X}'\mathbf{X}$ regulär, d.h. wenn ihre Inverse $\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}$ existiert, so dass

$$\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X} = \mathbf{I} \text{ (Einheitsmatrix)}$$

Voraussetzung erfüllt, wenn

- Anzahl Beobachtungstupel größer als Anzahl schätzender Parameter, $n > k$
- Spaltenvektoren von $\mathbf{X}$ linear unabhängig

Für $k = 1$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{x} \\ \overline{x} & \overline{x^2} \end{pmatrix}$$

Schätzen der Modellparameter (Matrizenform)

$$\mathbf{X\beta} + \mathbf{u} = \mathbf{y} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{e}$$
$$\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{u} = \mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{e}$$

$$SQR = \sum \mathbf{e}_i^2 = \mathbf{e}'\mathbf{e} = \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)'\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \left(\mathbf{y}' - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\right)\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)$$
$$= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Summanden in SQR sind skalare Größen, so dass $\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}$ und $\mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ identisch sind.

Nullsetzen der 1. Ableitung nach $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ liefert Normalgleichung:

$$\frac{\partial SQR}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = 0 \;\Rightarrow (\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

beide Seiten mit der Inversen $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ multiplizieren

$$\underbrace{\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)}_{\mathbf{I}}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Die Schätzformel lautet: $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ zur Bestimmung der Schätzwerte von

$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ und die Residuen $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$

Schätzen der Störvarianz

Konstante Varianz der Residuen

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-k-1}\mathbf{e}'\mathbf{e}$$

entspricht erwartungstreuen Schätzformel für Störvarianz

Algebraische Eigenschaften

Algebraische Implikationen der Methode der OLS sind technischer Art:

$$\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$
$$\mathbf{X}'\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}'(\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{e})$$
$$\mathbf{X}'\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}'\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{X}'\mathbf{e}$$

aus $\mathbf{X}'\mathbf{e} = 0$ und Multiplikation mit dem Vektor der Schätzparameter folgt:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{X}'\mathbf{e} = 0$$
$$\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{e} = 0$$

Orthogonalität

1. Vektor $\mathbf{e}$ der Residuen steht senkrecht auf $k+1$ Vektoren in $\mathbf{X}$. Dies bedeutet, dass Residuen keine Kovarianz mit exogenen Variablen haben, d.h. Residuen werden $k+1$ Restriktionen auferlegt, womit sich Zahl der Freiheitsgrade auf $n-k-1$ verringert.

2. Residuen auch senkrecht zum Vektor der Scheinvariablen (n Einsen), so dass

$$\sum 1 \cdot e_i = 0$$

   Summe der Residuen verschwindet und gewährleistet Zentraleigenschaft, so dass

$$\sum y_i = \sum \left(\hat{y}_i + e_i \right) = \sum \hat{y}_i$$
$$\Rightarrow \bar{y} = \overline{\hat{y}}$$

3. Residuenvektor $\mathbf{e}$ orthogonal zu Vektor der Schätzwerte

$$(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \ldots, \hat{y}_n) = \hat{\mathbf{y}}' = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'$$

4. Gleichung $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{e}$ bildet rechtwinkliges Dreieck und Quadrierung ergibt:

$$\mathbf{y}'\mathbf{y} = \left(\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{e} \right)' \left(\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{e} \right) = \left(\hat{\mathbf{y}}' + \mathbf{e}' \right) \left(\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{e} \right) = \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} + \underbrace{\hat{\mathbf{y}}'\mathbf{e}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{e}'\hat{\mathbf{y}}}_{=0} + \mathbf{e}'\mathbf{e} = \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{e}'\mathbf{e}$$

= Zerlegung in Quadratsumme der Schätzwerte und QS der Residuen

= Varianzzerlegung

durch n teilen und Quadrat des Mittelwertes subtrahieren:

$$\frac{1}{n}\mathbf{y}'\mathbf{y} - \overline{y}^2 = \frac{1}{n}\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} - \overline{y}^2 + \frac{1}{n}\mathbf{e}'\mathbf{e}$$ (geschätzte Varianz und Residualvarianz)

$$s_y^2 = s_{\hat{y}}^2 + s_E^2$$

Güte der Anpassung

= Erfassung durch Bestimmtheitsmaß (R^2 bzw. korrigiertes R^2)

Multiple Korrelationskoeffizient ist definiert als:

$$\sqrt{R^2} = \sqrt{\frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2}} = 1 - \sqrt{\frac{s_E^2}{s_y^2}} = 1 - \sqrt{\frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{\mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2}}$$

Bestimmtheitsmaß = Anteil der durch exogene Variablen X erklärten Varianz der endogenen Variablen Y an ihrer Gesamtvarianz, $0 \leq R^2 \leq 1$

Aber korrigiertes Bestimmtheitsmaß:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e} / (n-k-1)}{(\mathbf{y}'\mathbf{y} - n\bar{y}^2) / (n-1)}$$

6.4 Stochastische Eigenschaften

Nach OLS-Methode ist in der Schätzformel $\hat{\beta}$ eine Funktion von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{y}$. Mit $\mathbf{y} = \mathbf{x}\beta + \mathbf{u}$ kann sie als Funktion der wahren Parameter β und $\mathbf{u}$ beschrieben werden.

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\beta + \mathbf{u}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

$$\hat{\beta} = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

$\hat{\beta}$ ist ein Zufallsvektor, der stochastische Eigenschaften hat:

1. <u>unverzerrter Schätzer:</u> $E(\hat{\beta}) = \beta$

   da $E(\hat{\beta}) = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\mathbf{u}) = \beta$ ist.

2. Varianz-Kovarianz-Matrix ist eine symmetrische Matrix

$$\mathbf{S} := \begin{pmatrix} V(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) & \cdots & Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_k) \\ Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0) & V(\hat{\beta}_1) & \cdots & Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_k, \hat{\beta}_1) & \cdots & V(\hat{\beta}_k) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} := E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)']$$

$$\mathbf{S} := E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \underbrace{E[\mathbf{u}\mathbf{u}']}_{\sigma^2 \mathbf{I}} \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \underbrace{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}}_{=\mathbf{I}}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\sigma^2$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \cdot \sigma^2$$

Schätzwert für Varianz der latenten Variablen: $\hat{S} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \cdot \hat{\sigma}^2$

3. Parameterschätzungen sind konsistent: $p\lim \hat{\beta} = \beta$

4. BLUE-Eigenschaft (Best Linear Unbiased Estimator) für $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$:

$$V(\hat{\beta}) \leq V(\breve{\beta})$$

5. Sind Störvariablen *i.i.d.* normalverteilt, dann sind auch $\hat{\beta}_j$ normalverteilt, jedoch nicht unabhängig.

Konfidenzintervalle und Signifikanttests

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_j)}} = T$$

(Vorauss.: normalverteilte Störvariablen)

Bei kleiner Stichprobe exakt Student-*t* verteilt mit $n-k-1$ Freiheitsgraden:

$$P\left(-t < \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_j)}} \le +t\right) = F_T(t) - F_T(-t)$$

$$KONF\left(\hat{\beta}_j - t\hat{\sigma}_j \le \beta_j \le \hat{\beta}_j + t\hat{\sigma}_j\right) = 1-\alpha$$

<u>Zu testende Hypothese:</u> Exogene Variable X_i hat keinen Einfluss auf Y:

$$H_0 : \beta_j = 0, \text{ mit } j = 1, 2, \ldots, k$$

<u>Faustregel</u>

$$\frac{\left|\hat{\beta}_j\right|}{\hat{\sigma}_j} > 2 \qquad \Rightarrow \qquad H_0 \text{ verwerfen}$$

Häufig wird Signifikanz der <u>Modellspezifikation als Ganzes</u> getestet:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$$

Ausgehend von Varianzzerlegung:

$$s_Y^2 = s_{\hat{Y}}^2 + s_E^2$$

Unter Annahme der Normalverteilung und bei Gültigkeit der Nullhypothese gilt:

$$\frac{s_{\hat{Y}}^2 / k}{s_E^2 / (n-k-1)} > F_{n-k-1}^{k}[1-\alpha]$$

Beispiele:

Pindyck und Rubinfeld (1998): *Econometric Models and Economic Forecasts*.

Rate: Dreimonats Treasury Bill-Rate in Prozent (z.B. 5.00 statt 0.05)

IP: Industrial Production, d.h. eine höhere Industrieproduktion erhöht die Nachfrage und somit den Zins (vgl. ISLM Modell).

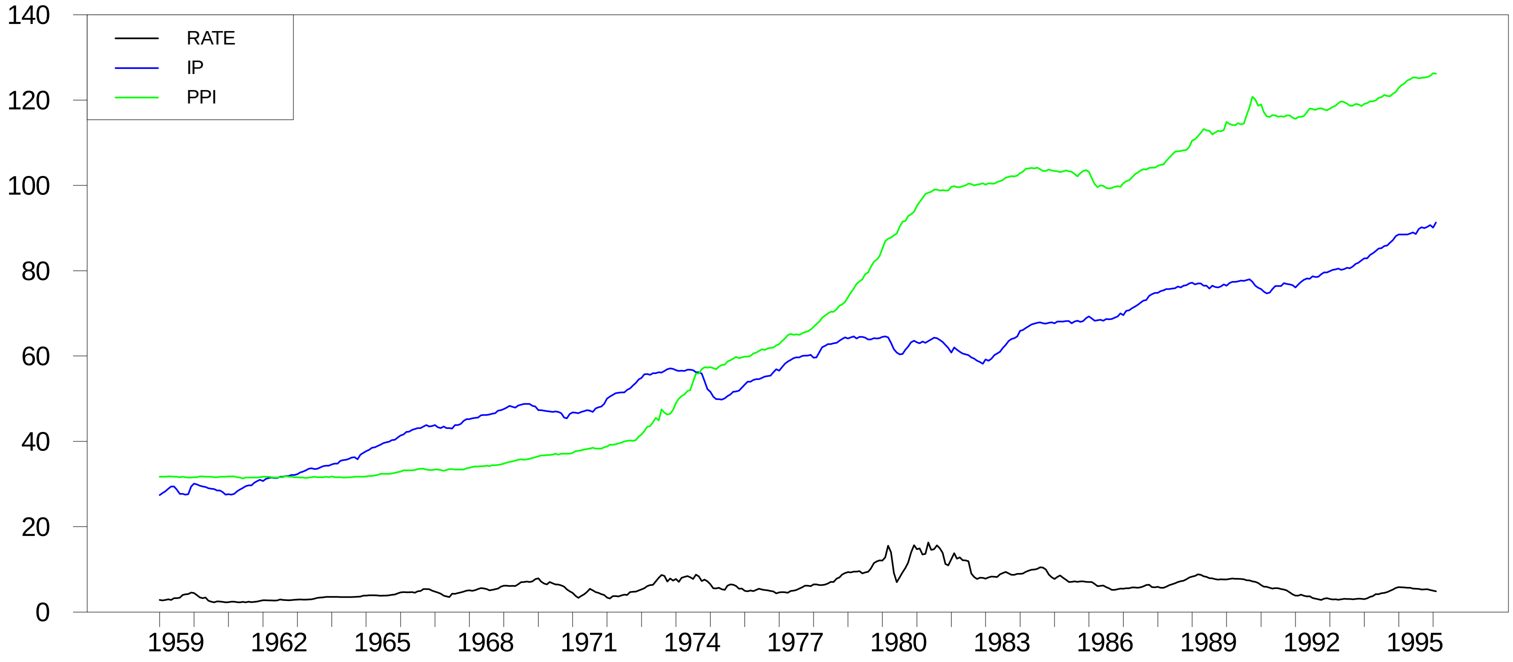
GRM2: Wachstumsrate von M2: $GRM2_t = \left[\frac{M2_t - M2_{t-1}}{M2_{t-1}}\right] \cdot 100$. Wenn die Geldmenge ansteigt, sinkt der Zins.

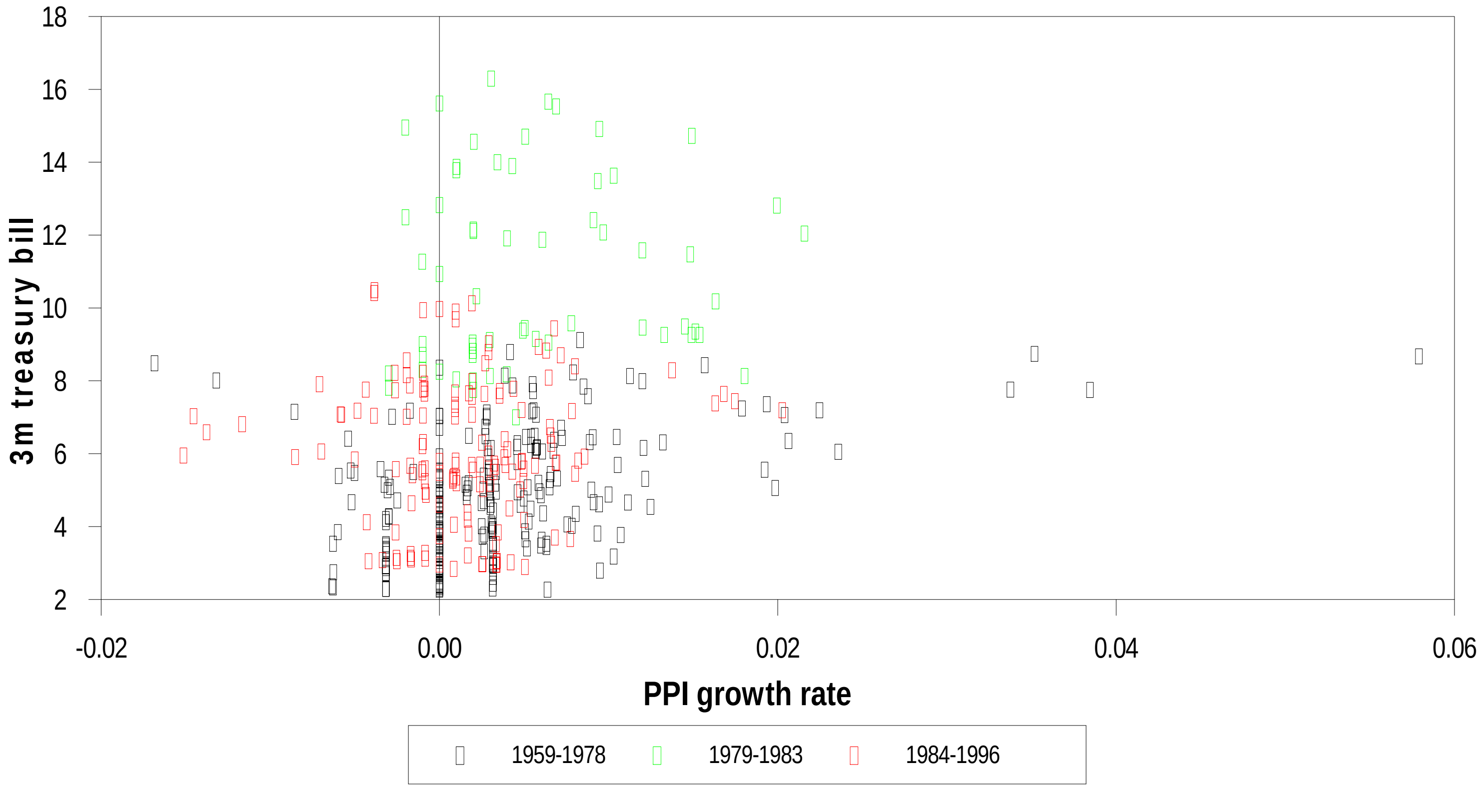
GRPPI: Wachstum des Producer Price index: $GRPPI_t = \left[\frac{PPI_t - PPI_{t-1}}{PPI_{t-1}}\right] \cdot 100$

Ein Anstieg in der Inflation veranlasst die Zentralbank den Zins zu erhöhen.

Folgende Regression soll geschätzt werden:

$$Rate = \alpha + \beta_1 IP + \beta_2 GRM2_t + \beta_3 GRPPI_{t-1} + u_t$$





18
16
14
12
10
8
6
4
2
3m treasury bill
-0.02
0.00
0.02
0.04
0.06
PPI growth rate
1959-1978
1979-1983
1984-1996

Linear Regression - Estimation by Least Squares
Dependent Variable RATE
Monthly Data From 1959:03 To 1996:02
Usable Observations 444 Degrees of Freedom 440
Centered R**2 0.221577 R Bar **2 0.216269
Mean of Dependent Variable 6.0733783784
Std Error of Dependent Variable 2.7725545963
Standard Error of Estimate 2.4545026092
Sum of Squared Residuals 2650.8165458
Regression F(3,440) 41.7484
Significance Level of F 0.00000000
Log Likelihood -1026.67796
Durbin-Watson Statistic 0.173033

Variable	Coeff	Std Error	t-Stat	Signifikanzniveau
1. Constant	1.20	0.52637189	2.29853	0.02199968
2. IP	0.06	0.00727000	8.97641	0.00000000
3. GRM2	1.36	0.34777355	3.91614	0.00010426
4. GRPPI{1}	1.01	0.17176151	5.93525	0.00000001

Das Geldmengenwachstum hat nicht das erwartete Vorzeichen. Ist die Theorie falsch oder die Regression? In diesem Fall die Regression da die Fehlerterme autokorreliert sind. Die robuste Regression wäre:

Regression with AR(1) - Estimation by Cochrane-Orcutt
Dependent Variable RATE
Monthly Data From 1959:04 To 1996:02
Usable Observations 443 Degrees of Freedom 438
Centered R**2 0.967979 R Bar **2 0.967687
Mean of Dependent Variable 6.0806546275
Std Error of Dependent Variable 2.7714419161
Standard Error of Estimate 0.4981890476
Sum of Squared Residuals 108.70823931
Regression F(4,438) 3310.1802
Significance Level of F 0.00000000
Log Likelihood -317.40394
Durbin-Watson Statistic 1.649624
Q(36-1) 144.264895
Significance Level of Q 0.00000000

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signifikanzniveau
1. Constant	-38.4	20.97251232	-1.831	0.067
2. IP	0.28	0.05365938	5.270	0.000
3. GRM2	-0.65	0.09741199	-6.702	0.000
4. GRPPI{1}	0.06	0.02953450	2.185	0.029
5. RHO	0.99874508	0.00525642	190.00473	0.00000000