Übungsblatt 2

Die mit z) gekennzeichneten Aufgabenteile sind in Gruppenarbeit zu lösen und im Rahmen des Hausaufgabenwettbewerbs am Lehrstuhl abzugeben. Die Lösungen für diese Aufgabenteile werden nach dem Abgabetermin ins Netz gestellt.

Aufgabe 1:

In einer Urne liegen 4 Kugeln mit der Aufschrift 10,12,14 und 16. Es wird eine Zufallsstichprobe vom Umfang n = 2 unter Berücksichtigung der Anordnung gezogen.

a) Wie lauten alle möglichen Stichproben für den Fall mit zurücklegen und ohne zurücklegen?

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Stichprobenmittelwertes für beide Fälle und vergleichen Sie den Erwartungswert von $\overline{x}$ mit dem Mittelwert der Grundgesamtheit.

c) Berechnen Sie die Varianz des Mittelwertes für beide Fälle (Annahme: Varianz der Grundgesamtheit sei nicht bekannt).

d) Überprüfen Sie, ob die Formeln zur Berechnung der Varianz des Mittelwertes stimmen (Annahme: Varianz der Grundgesamtheit ist bekannt).

Aufgabe 2:

Ein Hersteller von Autoteilen produziert eine Serie von N = 1000 Teilen. Zur Qualitätskontrolle werden der Serie eine Stichprobe von n = 20 Stück entnommen, wobei in der Stichprobe ein Mittelwert von $\overline{x}$ = 30mm gemessen wurde. Die Standardabweichung σ_X ist bekannt und beträgt 4. Außerdem ist die Größe der Autoteile in der Grundgesamtheit normalverteilt.

a) Berechnen Sie das 95%-Konfidenzintervall in dem der unbekannte Erwartungswert μ der Grundgesamtheit liegt.

b) Als Endkontrolle wird nochmals eine etwas größere Stichprobe vom Umfang n = 60 entnommen. Dieses mal wird ein Mittelwert von $\overline{x}$ = 32 mm gemessen. Wie berechnet sich jetzt das 95%-Konfidenzintervall?

Aufgabe 3:

(Fortsetzung von Aufgabe 2)

Für den Fall, das der Hersteller den Erwartungswert bzw. Mittelwert der Grundgesamtheit nicht kennt, ist es vernünftiger anzunehmen, dass die Standardabweichung der Grundgesamtheit σ_X sowie die Verteilung der Größe ebenfalls unbekannt ist. Die Stichprobe vom Umfang n = 20 Stück ergibt weiterhin einen Mittelwert von $\overline{x}$ = 30 kg. Die Standardabweichung der Stichprobe ergibt s = 3,5.

a) Wie sieht jetzt das 95%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Grundgesamtheit aus?

b) Berechnen Sie das Konfidenzintervall, in dem der Erwartungswert mit 99% Wahrscheinlichkeit **höchstens** liegt. Der Stichprobenumfang ist n = 65.

c) Bei einer kleineren Serie von N = 50 Stück wird eine Stichprobe vom Umfang n = 10 entnommen. Berechnen sie das 99%-Konfidenzintervall.

Aufgabe 4:

Eine Firma erhält eine Lieferung von Metallketten, die einer bestimmten Belastung standhalten müssen. Da bei dem Belastungstest die Ketten zerstört werden, wird der Lieferung von N = 1000 Stück eine Zufallsstichprobe vom Umfang n = 40 entnommen. Dabei halten 16 Ketten dem Belastungstest nicht stand.

a) Berechnen Sie das 95 %-Konfidenzintervall für den Anteilswert der Grundgesamtheit p.

b) In einer neuen Lieferung sind nur 750 Ketten enthalten. Eine Stichprobe vom Umfang n = 40 ergibt, dass 17 Ketten den Belastungstest nicht bestehen. Berechnen Sie das 90 %-Konfidenzintervall für den Anteilswert der Grundgesamtheit p.

Aufgabe 5:

Vor einem Wahllokal werden am Tag der Bundestagswahl in einer Stichprobe 30 zufällig ausgewählte Personen befragt, ob sie eine bestimmte Partei gewählt haben oder nicht. Dabei geben 21 Personen an, die bestimmte Partei gewählt zu haben. Berechnen sie das 95%-Konfidenzintervall für den Anteil aller Personen, welche die bestimmte Partei gewählt haben.

Aufgabe 6:

Zu Marketingzwecken soll in den Filialen einer bekannten Modemarke das Durchschnittsalter der Kunden bestimmt werden. Aus einer früheren Umfrage ist bekannt, dass das Alter der Kunden annähernd normalverteilt ist und die Standardabweichung $\sigma = 4$ Jahre beträgt. Um die Kosten und Umstände so gering wie möglich zu halten, soll der nötige Stichprobenumfang bestimmt werden, mit dem das Durchschnittsalter bei einem Fehler von 1,5 Jahren und einem Konfidenzintervall von 95% liegt.

Aufgabe 7:

Value-at-Risk ist eine in der Praxis häufig angewendete Kennzahl zur Messung von Preisrisiken von Portfolios. Er gibt den Verlust (z.B. in Euro oder in Prozent) an, der mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (z.B. 5%) nicht überschritten wird. Aus Sicht der Statistik handelt es sich hierbei um die Punktschätzung des 5% Quantils einer Verteilung.

a) Berechnen Sie den Value-at-Risk für ein Portfolio bestehend aus amerikanischen Wohnimmobilien im Zeitraum (1975Q3 - 2006Q2) mit dem Erwartungswert μ =5,988 und der Standardabweichung (Volatilität) σ = 2,015. Die Renditen waren in diesem Zeitraum normalverteilt.

b) Ein in der Praxis häufig gemachter Fehler ist die Annahme der Normalverteilung auch dann, wenn die Renditen in Wirklichkeit nicht normalverteilt sind, sondern eher durch eine t-Verteilung mit etwa 6 Freiheitsgraden beschrieben werden kann. Wie ändert sich dadurch das Ergebnis aus Teilaufgabe a?

Aufgabe Z1:

Ein amerikanischer Pensionsfond überlegt sich einige Gebäude in der Münchner Innenstadt zu kaufen. Um die Attraktivität der Investition zu beurteilen, möchte er die durchschnittliche Kaltmiete pro Quadratmeter wissen. Die lokalen Immobilienmakler veröffentlichen die durchschnittliche Kaltmiete aber nicht. Deshalb werden in einer Stichprobe von den 120 in Frage kommenden Gebäuden 20 Mieter nach ihren monatlichen Kosten befragt. Dabei ergibt sich ein Stichprobenmittelwert von $\overline{x}$ = 195 €$/m^2$ bei einer Standardabweichung von s = 53 €$/m^2$.

a) Berechnen Sie das 99% Konfidenzintervall, indem die tatsächliche Durchschnittsmiete der Grundgesamtheit liegt.

b) Berechnen Sie das 95% Konfidenzintervall, indem die Durchschnittsmiete mindestens liegt.

Aufgabe Z2:

Ein Automat produziert Kugellager. Wir ziehen eine Zufallsstichprobe von n = 225 Kugellagern aus der Wochenproduktion dieses Automaten. In der Stichprobe finden wir als durchschnittliches Kugellagergewicht $\mu = 0{,}824$ kg und $\sigma = 0{,}005$ kg.

a) Welche Standardabweichung hat der Stichprobenmittelwert. Ist dies eine Schätzung oder ein wahrer Wert?

b) Geben Sie eine zahlenmäßige Punktschätzung für den wahren Mittelwert und

c) ein 95%-Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert des Kugellagergewichtes in der Grundgesamtheit an.

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 14; Aufg. 14.5)

Aufgabe Z3:

Der Mittelwert μ einer Normalverteilung mit der Varianz $\sigma^2 = 9$ soll geschätzt werden. Eine Stichprobe vom Umfang n = 100 bringt den Mittelwert 53,97.

a) Geben Sie ein 95%-Konfidenzintervall für μ an.

b) Wie groß müsste der Stichprobenmittelwert sein, damit das Intervall kürzer wird?

c) Wie groß müsste der Stichprobenumfang genommen werden, damit man ein 95%-Konfidenzintervall der Länge 0,4 erhält?

d) Wie groß müsste der Stichprobenumfang sein, damit man ein 99%-Konfidenzintervall der Länge 0,4 erhält?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 14; Aufg. 14.6)

Aufgabe Z4:

Eine kleine Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit lieferte den folgenden Beobachtungsbefund:

12,7 13,3 13,0 12,9 13,1

a) Geben Sie ein Konfidenzintervall an, das den Mittelwert der Grundgesamtheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 überdeckt.

b) Angenommen, man verfügt über die richtige Information, dass die Varianz der Grundgesamtheit 0,036 ist, welches sind dann die Intervallgrenzen?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 14; Aufg. 14.12)