

Übungsblatt 3

Die mit z) gekennzeichneten Aufgabenteile sind in Gruppenarbeit zu lösen und im Rahmen des Hausaufgabenwettbewerbs am Lehrstuhl abzugeben. Die Lösungen für diese Aufgabenteile werden nach dem Abgabetermin ins Netz gestellt.

Aufgabe 1:

Aus einer Urne mit 3 grünen und 4 roten Kugeln werden zufällig 3 Kugeln mit zurücklegen gezogen, von denen 2 grün sind. Berechnen Sie den Maximum Likelihood Schätzer $\hat{\theta}$ für die Wahrscheinlichkeit eine grüne Kugel zu ziehen numerisch und analytisch.

Aufgabe 2:

X sei eine exponentialverteilte Zufallsvariable

$$X \sim \text{Exp}(\lambda), \quad \lambda \in]0, \infty[$$

Die gemeinsame Dichtefunktion (Likelihood Funktion) einer Stichprobe vom Umfang n lautet:

$$L(\lambda) = (\lambda e^{-\lambda x_1})(\lambda e^{-\lambda x_2}) \dots (\lambda e^{-\lambda x_n}) = \lambda^n \exp \left[-\lambda \sum_{i=1}^n x_i \right]$$

Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer $\hat{\lambda}$. (Hinweis: Bilden Sie vor dem Ableiten zunächst die Log-Likelihood Funktion).

Aufgabe 3:

In der Klimadebatte fordern deutsche Politiker bei Autos einen Zielwert von 130 Gramm CO_2 pro gefahrenen Kilometer. Die eigenen Fahrzeuge verfehlen das selbst gesetzte Ziel jedoch um Längen.

Politiker	US	MG	WT	U v.d.L	BZ	SG
CO_2/km	286	271	267	259	259	249

- a) Schätzen Sie den Mittelwert der Grundgesamtheit, also den CO_2 Ausstoß aller deutschen Politiker mit der Momentenmethode. Nehmen Sie dabei an, dass die Auswahl der Politiker rein zufällig erfolgte.
- b) Welche Probleme treten auf, wenn die Stichprobe nicht zufällig ausgewählt wurde, z.B. weil Politiker als umweltfreundlich oder umweltfeindlich dargestellt werden sollen?
- c) Schätzen Sie die Varianz der Grundgesamtheit mit der Momentenmethode. Wie hängt diese Varianz mit der Varianz des Stichprobenmittelwertes zusammen?
- d) Schätzen Sie den Mittelwert der Grundgesamtheit wie in a.), aber dieses Mal mit der Methode der Kleinsten Quadrate.

Aufgabe 4:

Sie wissen, dass die Bestellung von Vorprodukten und deren Lieferung rechteckverteilt ist. Allerdings kennen Sie die Ober- und Untergrenzen a und b der Rechteckverteilung nicht. Bei sieben bereits eingetroffenen Vorprodukten betrug die Lieferzeit in Minuten:

1	2	3	4	5	6	7
260	348	280	416	369	430	300

Schätzen Sie a und b dieser Rechteckverteilung mit Hilfe der Momentenmethode.

Aufgabe Z1:

Als IT-Administrator eines Unternehmens wissen Sie, dass die Dauer in Sekunden bis zum nächsten Eintreffen eines Datenpaketes auf einem Server exponentialverteilt ist. Bei den bisherigen Servern betrug der Erwartungswert $1/3$ Sekunden. Heute wurden neue Server geliefert, von denen Sie wissen dass sie schneller sind (d.h. $\lambda > 3$), der Parameter λ jedoch unbekannt ist. Die ersten 10 Datenpakete erreichten den Server mit folgender Dauer (in Sekunden):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,089	0,14	0,71	0,07	0,06	0,09	0,27	0,26	0,07	0,06

Schätzen Sie mit Hilfe der Momentenmethode den unbekannt Parameter λ .

Aufgabe Z2:

Ein arbeitsloser Statistiker sitzt in einer Bar und spielt einarmiger Bandit. Der Wirt (auch ehemaliger Statistiker) versichert, dass der Automat auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(x) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}$ mit der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen $\theta = 0,7$ eingestellt wurde.

Nach 18 mal spielen betrachtet der Spieler seine vergangenen Erfolge x : 0,1,0,0,0,1,1,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0 (mit $x = 1$ für Gewinne). Angesichts der Wahrscheinlichkeitsverteilung und der vorliegenden Daten ist ihm $\theta = 0,7$ höchst suspekt und er beschließt, den Maximum Likelihood Schätzer $\hat{\theta}$ zu berechnen.

- a) Berechnen Sie $\hat{\theta}$ für die allgemeine Likelihood Funktion für n -maliges spielen:

$$\theta^{x_1}(1 - \theta)^{1-x_1}\theta^{x_2}(1 - \theta)^{1-x_2} \dots \theta^{x_n}(1 - \theta)^{1-x_n} \longrightarrow L(\theta) = \theta^{\sum_i x_i} (1 - \theta)^{n - \sum_i x_i}$$

- b) Welche Gewinnwahrscheinlichkeit θ besteht, wenn man den ML-Schätzer zu Rate zieht? Welches Problem wird der Statistiker trotzdem haben, wenn er den Wirt beschuldigt die Gewinnwahrscheinlichkeit falsch angegeben zu haben?