

## Übungsblatt 4

Die mit z) gekennzeichneten Aufgabenteile sind in Gruppenarbeit zu lösen und im Rahmen des Hausaufgabenwettbewerbs am Lehrstuhl abzugeben. Die Lösungen für diese Aufgabenteile werden nach dem Abgabetermin ins Netz gestellt.

### Aufgabe 1:

Der **ADAC** veröffentlichte in seinem Jahresbericht, dass nach der Erfassung aller im Jahre 2001 in Deutschland verkauften Neuwagen 50% innerhalb des ersten Jahres Mängel aufwiesen. Unter den im ersten Halbjahr 2002 verkauften Autos wurde eine Zufallsstichprobe im Umfang  $n = 400$  durchgeführt, und es zeigte sich, dass hiervon nur noch 45,8% Mängel innerhalb des ersten Jahres aufwiesen. Der ADAC behauptet, dass diese deutliche Verbesserung der Qualität auf seine publizistische Tätigkeit zurückzuführen sei. Kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% die Nullhypothese, die Qualität habe sich verändert, verworfen werden?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 15; Aufg. 15.1)

### Aufgabe 2:

Ein **Versicherungsunternehmen** hat für ein bestimmtes Risiko die Prämie unter der Annahme von 550 € Kosten pro Schadensfall kalkuliert. Nach Ablauf mehrerer Monate waren  $n = 226$  Schadensfälle angefallen und reguliert worden. Eine Auswertung dieser Fälle zeigte einen durchschnittlichen Betrag von 562 € pro Schadensfall, wobei die Standardabweichung 160 € betrug.

- a) Kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 4,55\%$  immer noch angenommen werden, dass der Durchschnittsschaden bei 550 € liegt (Nullhypothese)?
- b) Welcher Stichprobenmittelwert einer Stichprobe vom Umfang  $n = 226$  würde die Beibehaltung der Nullhypothese gerade noch zulassen?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 15; Aufg. 15.2)

### Aufgabe 3:

Bei einer **Großbank** werden 1 000 000 Arbeitnehmer-Sparkonten geführt. Eine im Jahre 2001 durchgeführte Untersuchung zeigte, dass die jährliche Sparleistung je Konto im Mittel 800 € beträgt bei einer Standardabweichung von 400 € und mit großer Annäherung normalverteilt ist.

Mit einer Zufallsstichprobe vom Umfang  $n = 1600$  soll im Jahre 2002 die Nullhypothese getestet werden, dass sich die mittlere Sparleistung nicht verringert hat. Diese Stichprobe bringt eine mittlere Sparleistung von 840 € und eine Standardabweichung von 400 €.

Bestimmen Sie für den Test den Annahmebereich zu einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1%.

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 15; Aufg. 15.3)

#### Aufgabe 4:

In einer Stichprobe von 20 Studenten wurde ein durchschnittliches monatliches Nettoeinkommen von 430 € bei einer Varianz von 171 festgestellt. Bei einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0,05$  soll getestet werden, ob die Behauptung eines Forschungsinstitutes widerlegt werden kann, das durchschnittliche Nettoeinkommen von Studenten betrage mindestens 450 € im Monat. Für das monatliche Nettoeinkommen von Studenten liegt annähernd eine Normalverteilung vor.

#### Aufgabe 5:

Eine Lieferung von 800 Stahlseilen soll eine garantierte mittlere Reißfestigkeit von mindestens 5000 kp haben. Eine Reißfestigkeitsprüfung von 50 Stahlseilen ergab eine mittlere Reißlast von 4800 kp bei einer Standardabweichung  $s = 700$  kp. Bei einem Signifikanzniveau von 5% soll geprüft werden, ob diese Gütezusage in der Lieferung unterschritten worden ist.

#### Aufgabe 6:

Ein anderes Versicherungsunternehmen hat für ein bestimmtes Risiko die Prämie unter der Annahme kalkuliert, dass der Erwartungswert der Kosten  $K$  pro Schadensfall  $E(K)=750$  € beträgt und dass  $K$  normalverteilt ist. Nach Ablauf von zwei Monaten ergaben  $n = 16$  angefallene Schadensfälle einen durchschnittlichen Betrag von  $\bar{k} = 810$  € pro Schadensfall, wobei die empirische Varianz in dieser Stichprobe  $s^2 = 600$  € betrug.

- a) Geben Sie eine zahlenmäßige Schätzung der Varianz  $V(K)$ .
- b) Geben Sie einen Schätzwert für die Varianz des Stichprobenmittelwertes.
- c) Kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 5\%$  immer noch angenommen werden, dass der Durchschnittsschaden bei 750 € liegt (Nullhypothese)?
- d) Warum erhöht die Versicherungsgesellschaft nicht einfach die Prämie für dieses Risiko um 10% statt lange herumzutesten?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 15; Aufg. 15.4)

#### Aufgabe 7:

Der Student Anton behauptet, die Regenwürmer in seinem Garten erreichten eine Mindestgeschwindigkeit von 1 m/h zu ebener Erde bei einer Standardabweichung von  $\sigma = 0,3$  m/h. Antons Freund Paul möchte diese Behauptung widerlegen. Paul findet in einer Stichprobe mit Zurücklegen vom Umfang  $n = 36$  eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 0,9 m/h. Führen Sie den Test für  $\alpha = 0,05$  durch.

#### Aufgabe 8:

Eine studentische Organisation behauptet, bei den kommenden Wahlen seien ihr mindestens 30% der Stimmen sicher. Diese Behauptung soll widerlegt werden ( $\alpha = 0,05$ ). Eine Stichprobe vom Umfang  $n = 65$  ergibt einen Anteil von 12 Wählern dieser Organisation. Führen Sie den Test durch.

### Aufgabe 9:

In einer Großstadt soll der Anteil der Beamten unter den Erwerbstätigen mindestens 20% betragen. In einer Stichprobe vom Umfang  $n = 100$  findet man 15 Beamte. Kann die Behauptung widerlegt werden? (Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$ )

### Aufgabe 10:

Der Hersteller einer Drehmaschine gibt an, dass seine Maschine sehr genau arbeitet. Er belegt diese Behauptung mit der Angabe, dass die annähernd normalverteilten Durchmesser der gedrehten Teile eine Varianz  $\sigma^2 = 0,01$  haben. Eine Versuchsserie des Käufers vom Umfang  $n = 31$  ergab eine Varianz von  $s^2 = 0,012$ . Kann die Angabe des Herstellers als falsch angesehen werden? ( $\alpha = 0,05$ )

### Aufgabe 11:

Aus einer Serienproduktion eines Werkstücks sind in einem gewissen zeitlichen Abstand zur Überprüfung der Masse (in mg) zwei Stichproben mit folgenden Vergleichswerten herausgegriffen worden:

$$\begin{array}{ll} n_1 = 10 & n_2 = 10 \\ \bar{x}_1 = 3524 & \bar{x}_2 = 3479 \\ s_1 = 46,9 & s_2 = 58,9 \end{array}$$

Darf man annehmen, dass in der Zeit von der Entnahme der ersten bis zur Entnahme der zweiten Stichprobe wesentliche Änderungen im Produktionsverlauf eingetreten sind? ( $\alpha = 0,05$ )

### Aufgabe 12:

Ein Gärtner züchtet langstielige Rosen. Um zu prüfen, ob ein neuartiger Dünger die Stiellänge vergrößert, wendet der Gärtner den Dünger nur auf einer Parzelle an und misst dort an  $n_1 = 46$  Rosen eine mittlere Stiellänge von 60 cm bei einer Standardabweichung von  $s_1 = 6$  cm. Eine nicht gedüngte Vergleichsparzelle liefert dagegen an  $n_2 = 65$  Rosen einen Mittelwert von 57 cm bei einer Standardabweichung von  $s_2 = 6,4$  cm. Kann aus diesen Ergebnissen auf eine Vergrößerung der Stiellänge durch den Dünger geschlossen werden? ( $\alpha = 0,01$ )

### Aufgabe 13:

Bei einer Meinungsumfrage stellt ein Marktforschungsinstitut fest, dass der potentielle Anteil der recht-radikalen Wähler 10% ist (Umfrageumfang  $n_1 = 300$ ). Ein anderes Institut stellt fest, dass dieser Anteil 8% betrage. Die befragte Menge dieses Instituts beträgt  $n_2 = 200$ . Sind die beiden Umfrageergebnisse signifikant voneinander verschieden? (Signifikanzniveau 1%)

### Aufgabe 14:

Einem Motorenhersteller werden zwei Typen von Ventilen angeboten. Er ist einerseits an einer möglichst hohen mittleren Lebensdauer  $\mu$  interessiert, andererseits aber auch an einer geringen Streuung  $\sigma^2$ . Auf Prüfständen erreichen  $n_A = 8$  Ventile des Typs A eine mittlere Lebensdauer von  $x_A = 2000$  h bei einer Standardabweichung von  $s_A = 100$  h, die  $n_B = 8$  Ventile des Typs B eine mittlere Lebensdauer von  $x_B = 2000$  h bei einer Standardabweichung von  $s_B = 80$  h. Da die Ventile des Typs A billiger sind, möchte der Hersteller den Typ B nur dann annehmen, wenn  $\sigma_B$  statistisch nachweisbar kleiner als  $\sigma_A$  ist (Signifikanzniveau 5%). Die Lebensdauern seien normalverteilt. Wie wird sich der Hersteller entscheiden?

### Aufgabe Z1:

Bei einer **Kontrolle der laufenden Produktion** eines Automaten werden stündlich kleine Stichproben vom Umfang  $n = 5$  gezogen, es wird die Dicke des Werkstückes gemessen und daraus das arithmetische Mittel berechnet. Aus langfristiger Erfahrung weiß man, dass die Varianz der Dicke unverändert  $\sigma^2 = 0,45\text{mm}^2$  beträgt und die Dicke sehr gut normalverteilt ist. Der Mittelwert der Dicke der Werkstücke schwankt jedoch gelegentlich, und der Automat muss dann neu eingestellt werden. Wann eine Neueinstellung nötig ist, soll aus der kleinen Stichprobe geschlossen werden.

- a) Wie groß ist die Standardabweichung des Stichprobenmittelwertes?
- b) Ist Ihre Angabe zu a) eine Schätzung?
- c) Ab welcher Abweichung des Stichprobenmittelwertes vom Sollwert  $\mu_0$  würden Sie den Automaten anhalten, wobei Sie sichergehen wollen, dass der Automat nur mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\alpha = 0,03$  irrtümlich angehalten wird (Fehler 1. Art)?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 15; Aufg. 15.5)

### Aufgabe Z2:

Bei einem statistischen Test, mit dem untersucht werden soll, ob die mittlere Füllmenge  $\mu$  von Bierflaschen bei einer laufenden Produktion von 500 ccm abweicht, wird eine Zufallsstichprobe des Umfangs  $n = 26$  gezogen. Die Stichprobe liefert  $\bar{x} = 490$  und  $s = 25$ . Die Füllmenge  $X$  ist annähernd normalverteilt. Bestimmen Sie den Annahmehereich ( $\alpha = 0,05$ ). Wie lautet die Testentscheidung?

### Aufgabe Z3:

Eine Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit lieferte den folgenden Beobachtungsbefund:

12.7      13.3      13.0      12.9      13.1

- a) Lässt sich aufgrund dieser Stichprobe die Nullhypothese, der wahre Mittelwert der Grundgesamtheit betrage 12.83, auf einem Signifikanzniveau von 0.05 verwerfen?
- b) Angenommen, man verfüge über die richtige Information, dass die Varianz der Grundgesamtheit 0.0036 ist. Lässt sich nun die Nullhypothese verwerfen?

(Aufgabe aus Schira, Kapitel 15; Aufg. 15.6)

### Aufgabe Z4:

Ein Hersteller von Schmelzsicherungen behauptet, der Anteil der funktionstüchtigen Schmelzsicherungen betrage höchstens 10%. Diese Behauptung soll in einer Abnahmeprüfung mit einer Stichprobe des Umfangs  $n = 144$  geprüft werden ( $\alpha = 0,05$ ).

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Normalverteilung den Annahmehereich des Signifikanztests.
- b) In der Stichprobe entdeckt man 25 defekte Sicherungen. Ist damit die Behauptung des Herstellers bereits statistisch widerlegt?

### Aufgabe Z5:

In zwei europäischen Staaten A und B wird das Pensionierungsalter (in Jahren) von jeweils 6 zufällig ausgewählten Beamten ermittelt. Dabei ergab sich:

Alter der Beamten in A	63	66	66	69	63	69
Alter der Beamten in B	59	60	63	61	64	65

- a) Prüfen Sie die Behauptung, dass das durchschnittliche Pensionierungsalter in Land A höher sei, als das durchschnittliche Pensionierungsalter in Land B (Signifikanzniveau  $\alpha = 0,025$ ).
- b) Ermitteln Sie, ob die Beamten in Land A hinsichtlich ihres Pensionierungsalters eine homogenere Gruppe darstellen, als die Beamten in Land B ( $\alpha = 0,01$ ).

### Aufgabe Z6:

Von 570 an einer schweren Infektionskrankheit erkrankten Patienten wurden 230 mit einem Medikament A und 340 mit einem Medikament B behandelt. Von den mit A behandelten Patienten starben 37, von den mit B behandelten Patienten 28.

- a) Lässt sich aus diesem Ergebnis auf einen signifikanten Unterschied der Heilwirkungen der beiden Medikamente schließen (Signifikanzniveau 5%)?
- b) Lässt sich aus dem Ergebnis schließen, dass die Heilwirkung von B signifikant größer ist, als die von A (Signifikanzniveau 5%)?