5. Spezielle Testverfahren

Zahlreiche parametrische und nichtparametrische Testverfahren, die nach Testverteilung (Binomial, *t*-Test etc.), Analyseziel (Anpassungs- und Unabhängigkeitstest) oder Konstruktion der Prüfgröße (Vorzeichentest) benannt sind.

5.1 Tests für Median und Quantile

Nullhypothese: $H_0 : x_{Med} = x_0$

Liegt Median (Zentralwert) vor, sind in unabhängiger Zufallsstichprobe Hälfte der Werte größer als x_0 und Hälfte kleiner. Ist Anzahl deutlich kleiner oder größer, muss H_0 verworfen werden.

Einfacher Vorzeichentest

Prüfstatistik = Anzahl Stichprobenwerte größer als Hypothesenwert

$$V^{+} = Anzahl\ der\ Werte\ X_i > x_0$$

Ist x_0 der Median, dann ist Wahrscheinlichkeit in der Stichprobe ein größeres Element zu finden $p = 0.5$ und V^{+} ist eine binomialverteilte Zufallsvariable mit n und $p = 0.5$:

$$H_0 : p = \frac{1}{2}$$

Binomialtest:

1. einseitiger Test: $H_0: p \geq 0.5$ gegen $H_1: p < 0.5$

   mit $P(V^+ < b) \leq \alpha$

2. oberseitiger Test: $H_0: p \leq 0.5$ gegen $H_1: p > 0.5$

   mit $P(V^+ < b) \leq \alpha$

3. zweiseitiger Test: $H_0: p = 0.5$ gegen $H_1: p \neq 0.5$

   mit $P(V^+ < b_{unten}) \leq \frac{\alpha}{2}$ und $P(V^+ > b_{oben}) \leq \frac{\alpha}{2}$

= verteilungsfreier Test;

für $n > 25$ kann Normalverteilung herangezogen werden unter Berücksichtigung der **Stetigkeitskorrektur**

$$\frac{(V^{+} + 0.5) - n/2}{\sqrt{n}/2} \approx Z$$ (annähernd standardnormalvert.)

Test ist nicht nur für kardinale (metrische) Daten, sondern auch für ordinale Daten x_i verwendbar!

Test für Quantile

Analog zu Median kann für andere Qunatile ebenfalls Vorzeichentest durchgeführt werden:

$$H_0 : x[q] = x_0$$

d.h. $100 \cdot q$% der Werte kleiner und $100 \cdot (1-q)$% größer als hypothetischer Wert x_0 und es gilt die Nullhypothese:

$$H_0 : p = (1-q)$$

zu testen (mit krit. Werten für Testgröße V^+ aus Binomialverteilung (n, $1-q$)

Für große n gilt

$$\frac{(V^{+}+0.5)-n(1-q)}{\sqrt{nq(1-q)}} \approx Z$$

5.2 Anpassungstests

Viele statistische Methoden setzen voraus, dass das interessierende Merkmal eine bestimmte Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzt. Ob die beobachteten Daten mit einer bestimmten Verteilung der Zufallsvariablen vereinbar sind, kann man mit Hilfe eines Anpassungstests überprüfen.

Der Anpassungstest vergleicht die gegebenen Daten mit einer hypothetischen Verteilung und entscheidet, ob die Beobachtungsdaten zu dieser Verteilung „passen“ oder nicht.

χ^2-Anpassungstest

Bei diesem Test wird eine empirisch gewonnene Verteilung (oder eine Stichprobe) mit einer vorgegebenen theoretischen Verteilung F_0 verglichen, um dann die Entscheidung zu treffen, ob die empirische Verteilung so stark von der theoretischen abweicht, dass die Nullhypothese ($H_0 : F = F_0$) verworfen werden muss.

F: unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung, aus der die Stichprobe stammt, also die Verteilung in der Grundgesamtheit.

F_0: theoretische Verteilung (z.B. Normal-, Poisson-, Binomialverteilung usw.).

$$H_0 : F(x) = F_0(x); \quad H_1 : F(x) \neq F_0(x)$$

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{e_i} - n$$

Die Testgröße T ist χ^2**-verteilt** mit $\nu = k - 1$ Freiheitsgraden.

$i = 1, \ldots, k$ = Merkmale bzw. Klassen

n_i = empirisch beobachtete Werte (absolute Häufigkeiten),

$e_i = n \cdot f(x_i)$ = theoretisch erwartete Werte im diskreten Fall,

$e_i = n \cdot \Delta F_i(x)$ = theoretisch erwartete Werte im stetigen Fall

wobei: $\sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} e_i = n$

5.3 Unabhängigkeitstest

Test auf Übereinstimmung zwischen empirisch beobachteten Häufigkeiten.

Gegeben seien zwei gemeinsam verteilte Zufallsvariablen X und Y. Es soll geprüft werden, ob X und Y stochastisch unabhängig sind.

$$H_0: X \text{ und } Y \text{ sind unabhängig}$$
$$H_1: X \text{ und } Y \text{ sind abhängig}$$
$$T = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{\left(n_{ij} - e_{ij} \right)^2}{e_{ij}}$$

n_{ij} **(**$i = 1, \ldots, k$ **;** $j = 1, \ldots, l$**)** und den theoretisch erwarteten Häufigkeiten e_{ij}, die eintreffen würden, wenn X und Y unabhängig wären.

Unabhängigkeitsannahme: $f_{ij} = f_{i\bullet} \cdot f_{\bullet j}$

n_{ij} = empirisch beobachtete Häufigkeiten

$e_{ij} = n \cdot f_{i\bullet} \cdot f_{\bullet j} = 1/n \cdot n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}$ = theoretisch erwartete Häufigkeiten

Die Testgröße T ist χ^2-verteilt mit $\nu = (k-1)(l-1)$ Freiheitsgraden.

5.4 Homogenitätstest

Mit Homogenitätstest werden die Hypothesen der Form

$$H_0 : F_1 = F_2 = \ldots = F_m$$

$H_1 : F_i \neq F_j$ für mindestens ein Paar (i, j)

Fragestellung: Können zwei oder mehr unabhängige empirische Stichproben eines Merkmals als Stichproben aus derselben Grundgesamtheit bzw. aus Grundgesamtheiten, welche dieselbe Verteilung haben, aufgefasst werden.

Ausgangssituation: Kontingenztabelle mit entsprechenden Randverteilungen

Die erwarteten Häufigkeiten ergeben sich analog zum Homogenitätstest:

$$e_{ij} = 1/n \cdot n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}$$

unter Verwendung der Stichprobeninformation und der Nullhypothese. Je mehr n_{ij} von e_{ij} abweichen, um so eher ist zu vermuten, dass H_0 nicht zutrifft.

$$T = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(n_{ij} - e_{ij} \right)^2}{e_{ij}} > \chi^2_{(m-1)(k-1)}[1-\alpha] \Rightarrow H_0 \; verwerfen!$$

Hommogenitäts- und χ^2-Test sind eng verwandt, da Hypothese der Unabhängigkeit besagt, dass bedingte Verteilungen alle gleich sind. Bei Homogenitätstest entsprechen die bedingten Verteilungen aber den einzelnen Verteilungen $F_1 = F_2 = \ldots = F_m$ in der Hypothese.

5.5 Test auf Korrelation

Empirische Korrelationskoeffizient (Bravais-Pearson):

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} \text{ mit } -1 \leq r \leq +1$$

Korrelationskoeffizient misst linearer statistischer Zusammenhang von metrischen Daten.

Fragestellung: Ob von Korrelationskoeffizient aus einer Stichprobe r auf eine Korrelation ρ in Grundgesamtheit bzw. in der der Stichprobe zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung geschlossen werden kann?

$$H_0 : \rho = 0$$

Der Korrelationskoeffizient r in einer Stichprobe ist eine Realisation einer Zufallsvariablen R.

Dabei ist die Größe $R \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-R^2}} = T_{n-2}$ unter der H_0 t-verteilt mit $n-2$ Freiheitsgraden, wenn X und Y gemeinsam normalverteilt sind.

Entscheidungsregel bei zweiseitigem Test:

$$\left| r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} \right| > t_{n-2}[1-\alpha/2] \Rightarrow H_0 \ verwerfen!$$

Die Entscheidung, ob der Korrelationskoeffizient in der Stichprobe groß genug ist, um auf Korrelation in der Grundgesamtheit schließen zu können, hängt von dem gewählten Signifikanzniveau und vom Stichprobenumfang ab.

Rangkorrelationskoeffizient (nach Spearman)

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum_i d_i^2}{n\left(n^2 - 1\right)}$$

mit $d_i = Rg(x) - Rg(y)$

für ordinalskalierte Variablen.

$$H_0 : \rho^{Sp} = 0$$

Die Zufallsvariable R^{Sp} ist hinlänglich normalverteilt mit Erwartungswert Null und Varianz $V(R^{Sp}) = 1/(n-1)$.

Die Testentscheidung lautet für einen zweiseitigen Test:

$$\left| r^{Sp} \cdot \sqrt{n-1} \right| > z[1-\alpha/2] \Rightarrow H_0 \text{ verwerfen!}$$

5.6 Varianzanalyse (ANOVA)

Anhand von $m > 2$ unabhängigen Zufallsstichproben soll geprüft werden, ob Verteilungen, aus denen sie entnommen sind, alle den gleichen Mittelwert haben oder nicht:

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_m$

H_1 : mindestens zwei der μ_i sind verschieden

<u>Gegeben:</u> Stichproben $n_1, \ldots, n_m$, Mittelwerte $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m$ und Varianzen $s_1^2, \ldots, s_2^2$ sowie Zusammenfassung zur Gesamtstichprobe vom Umfang und Gesamtmittelwert:

$$n = \sum n_i \text{ und } \overline{x}_{ges} = \frac{1}{n} \sum n_i \overline{x}_i$$

Die Varianz kann aus den m einzelnen Varianzen und den Mittelwerten als Summe von interner und externer Varianz berechnet werden:

Gesamtvarianz: $$s_{ges}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i s_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i(\overline{x}_i - \overline{x}_{ges})^2$$

interne Varianz: $$s_{\text{int}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{x}_i)^2$$

externe Varianz: $$s_{ext}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i(\overline{x}_i - \overline{x}_{ges})^2$$

1. interne Varianz = gewichtete Mittel aus Varianzen *innerhalb* der m Gruppen bzw. Stichproben.

2. externe Varianz = Varianz der Mittelwerte $\overline{x}$, also die Varianz *zwischen* den Gruppen bzw. Stichproben

Entscheidungsregel basiert auf Verhältnis von externer zu interner Varianz, d.h. H_0 wird verworfen, wenn Prüfgröße:

$$s_{ext}^2 = \frac{\frac{1}{m-1} s_{ext}^2}{\frac{1}{n-m} s_{int}^2} > F_{n-m}^{m-1}[1-\alpha]$$

Die Teststatistik ist bei Annahme der Normalverteilung und gleicher Varianz sowie der Nullhypothese gleicher Mittelwerte *F*-verteilt.