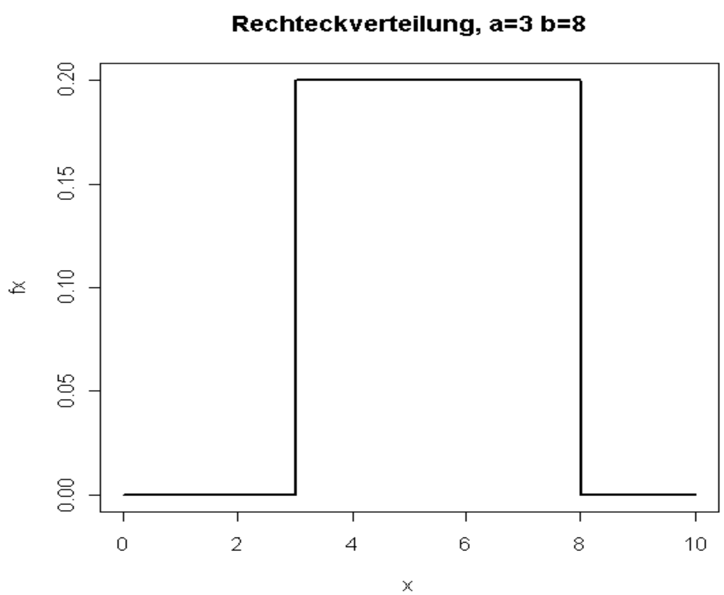
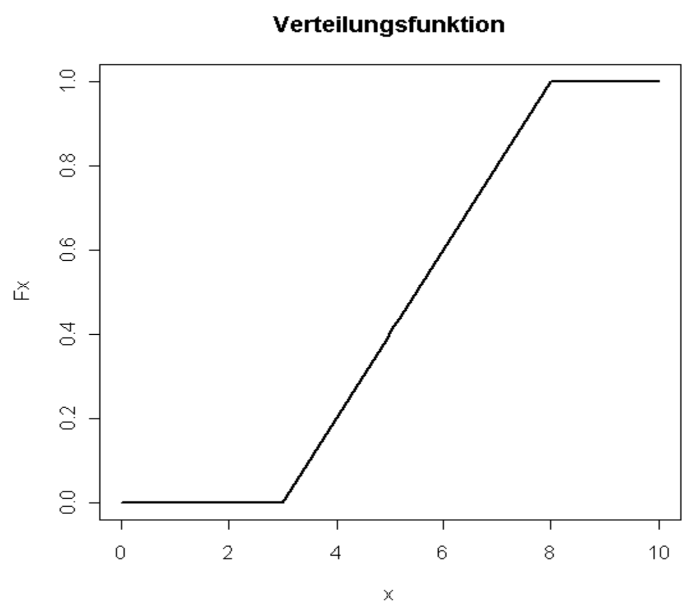
1. Spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsmodelle

1.1 Rechteckverteilung

- Die Dichtefunktion der Rechteckverteilung ist in einem bestimmten Intervall $[a, b]$ positiv und konstant und ansonsten Null.





- Die Rechteckverteilung ist die stetige Version der Gleichverteilung (z.B. Würfel) d.h. in einem bestimmten Intervall [a;b] ist die Eintrittswahrscheinlichkeit gleich groß.

- Dichtefunktion: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & ,\, a<x<b\\ 0 & ,\, sonst\end{cases}$

- Verteilungsfunktion: $F(x)=\begin{cases}0 & ,\, x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & ,\, a\le x<b\\ 1 & ,\, b\le x\end{cases}$

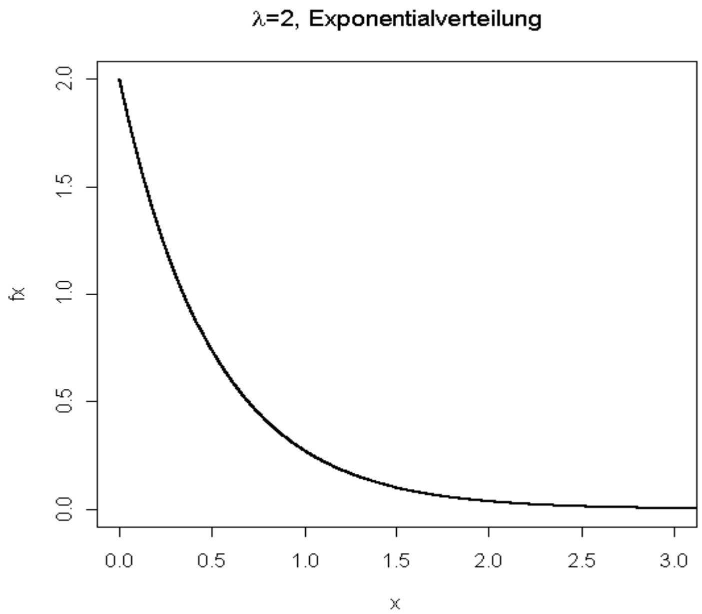
- Erwartungswert und Varianz: $E(X)=\dfrac{b+a}{2}$ und $\sigma^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

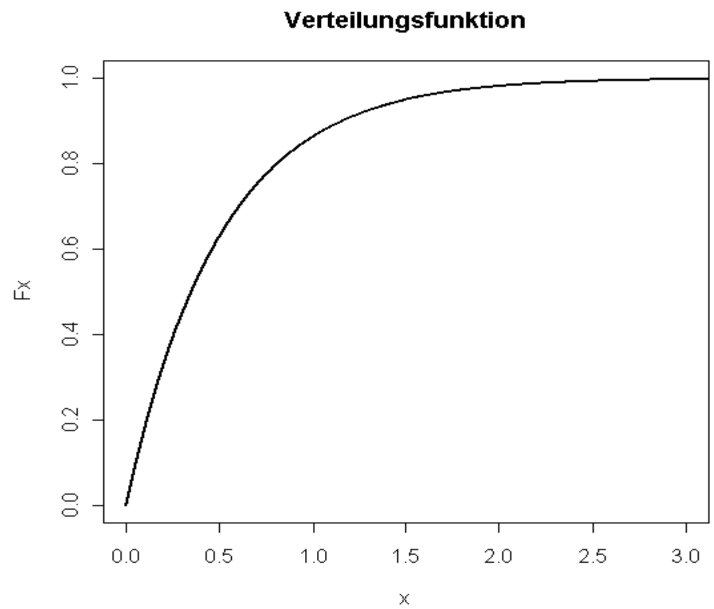
1.2 Exponentialverteilung

- Die Exponentialverteilung ist die stetige Version der geometrischen Verteilung, d.h. x ist die Zeit (z.B. in Minuten) bis zu zum Eintreffen des Ereignisses *A*.

- Häufige Verwendung: Die Dauer in Minuten bis zur nächsten Schadensmeldung bei Versicherungen oder die Dauer in Sekunden bis zum nächsten Anruf in Call Centern.

- **Dichtefunktion:** $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , 0 \leq x < \infty \\ 0 & , sonst \end{cases}$ für $\lambda > 0$





- **Verteilungsfunktion:** $F(x)=\begin{cases}0 & ,x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & ,0\leq x<\infty\end{cases}$

- Je größer λ ist, desto schneller konvergiert $f(x)$ gegen 0 und $F(x)$ gegen 1, d.h. die Dauer bis zur nächsten Schadensmeldung ist noch kürzer und die Wahrscheinlichkeit, das es länger dauert, sinkt.

- **Erwartungswert und Varianz:** $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ und $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

- Die Exponentialverteilung hat kein Gedächtnis: Die Wahrscheinlichkeit mehr als 5 Minuten zu warten, nachdem man bereits 10 Minuten gewartet hat, ist dieselbe Wahrscheinlichkeit wie wenn man zu Beginn mehr als 5 Minuten warten muss: $P(X > 15 | X > 10) = P(X > 5)$

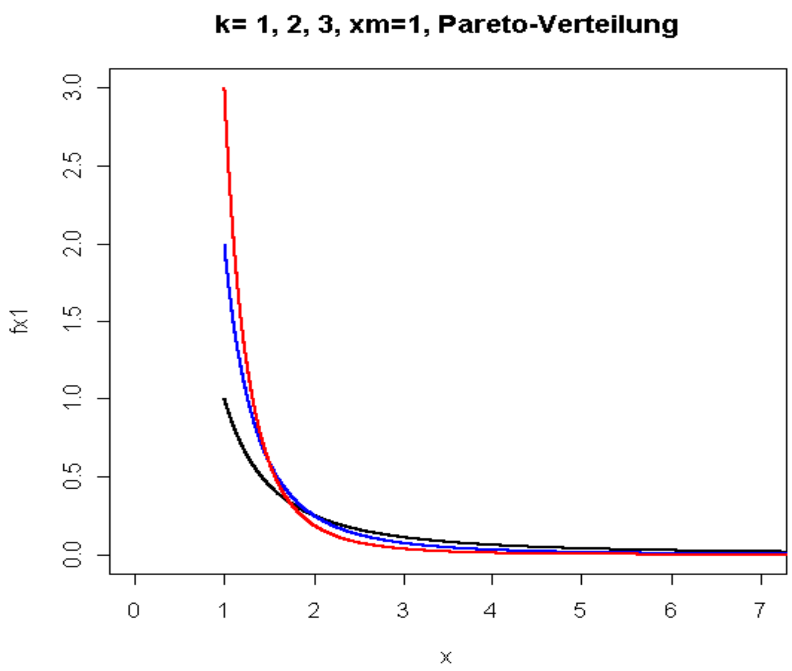
- Gedächtnislosigkeit bedeutet nicht stochastische Unabhängigkeit. Letzteres wäre $P(X > 15 | X > 10) = P(X > 15)$ wie es z.B. beim Würfel der Fall ist.

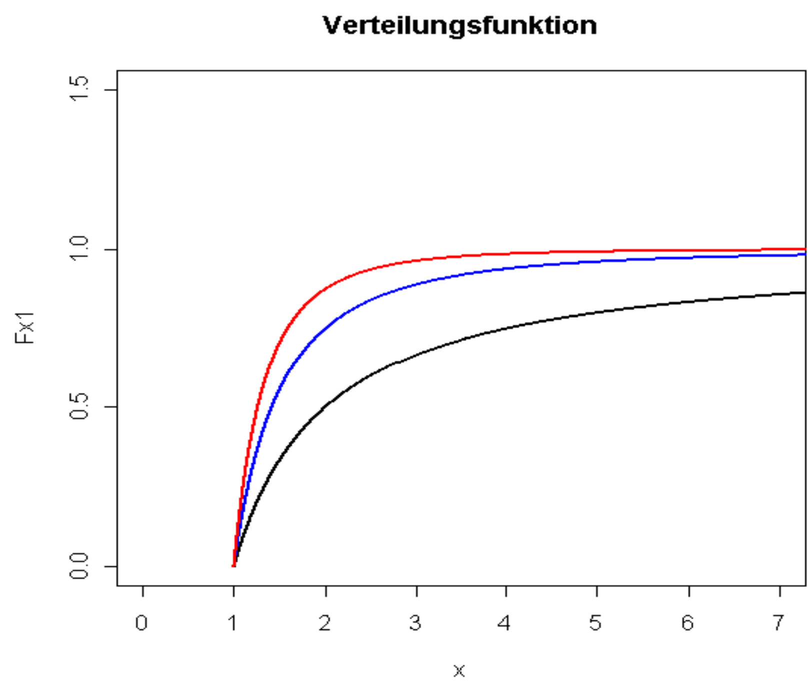
1.3 Pareto-Verteilung

- Die Pareto-Verteilung wird häufig dann angewendet, wenn die Grundgesamtheit hauptsächlich nur positive Werte enthält und aus vielen kleinen Einheiten und wenigen großen Einheiten besteht. Z.B. ist die Bevölkerung eines Landes auf wenige große Städte aber auf viele kleine Städte und Dörfer verteilt.

- **Dichtefunktion:** $f(x)=\begin{cases} k\dfrac{x_m^k}{x^{k+1}} & , x \geq x_m \\ 0 & , sonst \end{cases}$ mit x_m als das kleinste Element in der Grundgesamtheit und *k* als Krümmungsparameter.

- **Erwartungswert und Varianz:** $E(X)=\dfrac{kx_m}{k-1}$ und $\sigma^2=\left(\dfrac{x_m}{k-1}\right)^2\dfrac{k}{k-2}$


k= 1, 2, 3, xm=1, Pareto-Verteilung
fx1
x
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
0
1
2
3
4
5
6
7

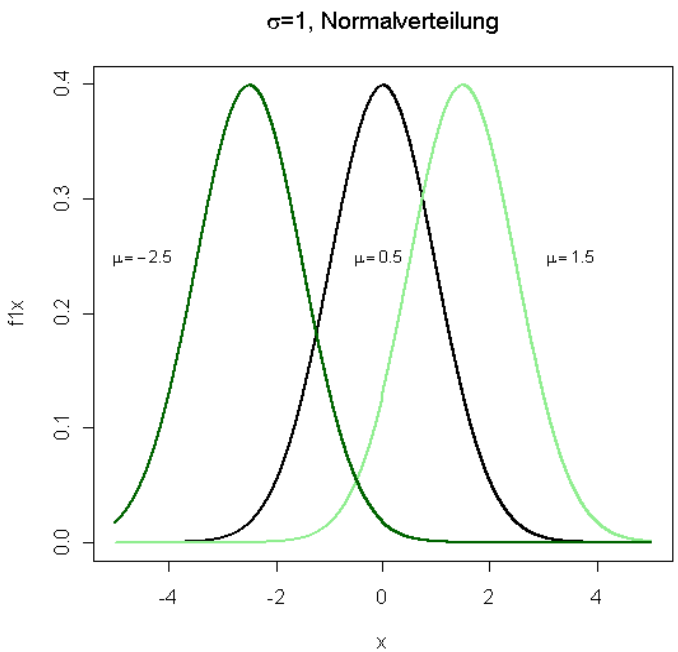

Verteilungsfunktion
Fx1
x
0.0
0.5
1.0
1.5
0
1
2
3
4
5
6
7

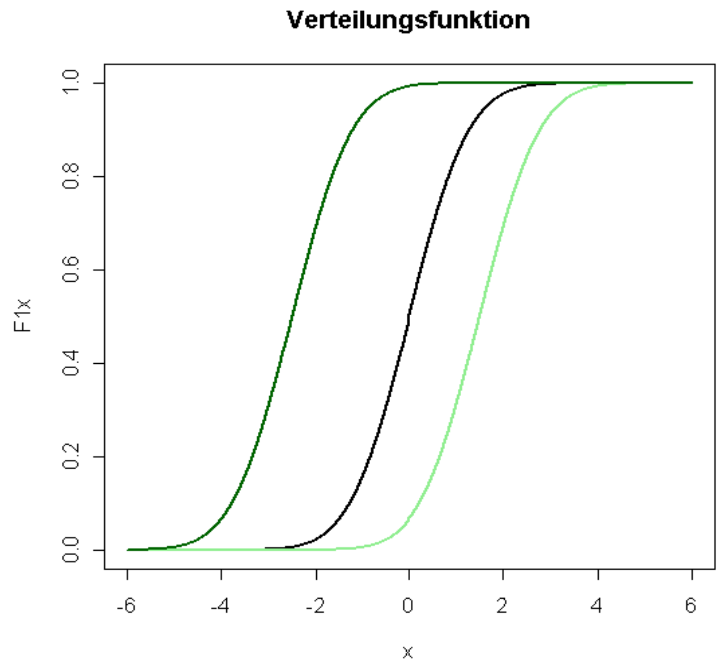
1.4 Normalverteilung

- Die NV stellt die wichtigste stetige Verteilung für die Schätz- und Testtheorie dar.

- Die NV wird durch den Mittelwert μ und die Varianz σ^2 bzw. Standardabweichung σ vollständig beschrieben.

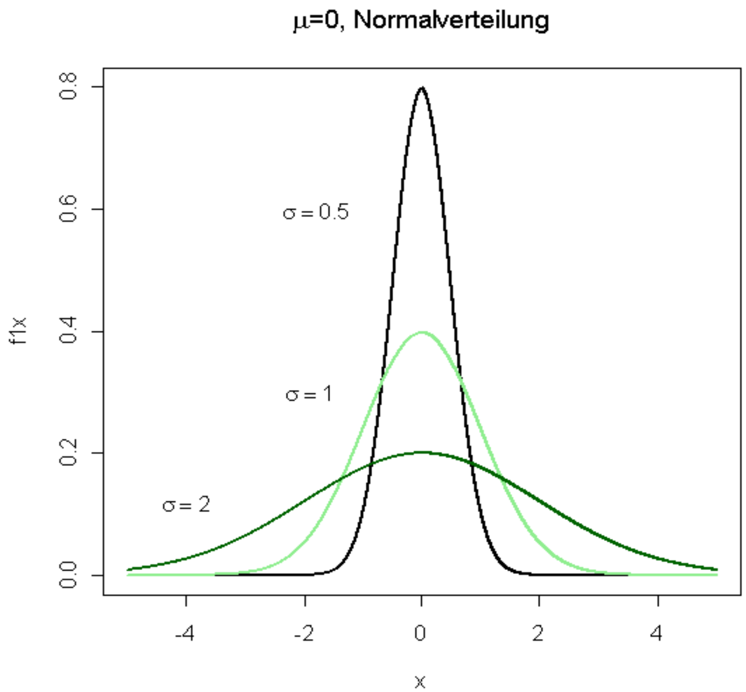
- Wahrscheinlichkeitsfunktion: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

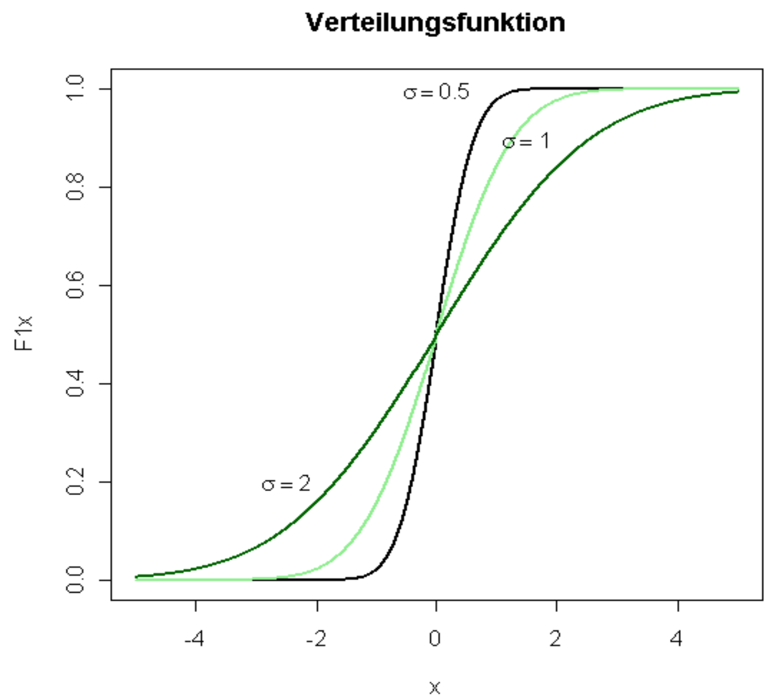




- Eine normalverteilte Zufallsvariable X wird dann kompakt als $X \sim N(\mu;\sigma)$ geschrieben.

- Normalverteilungen mit kleinerer Standardabweichung haben mehr Wahrscheinlichkeitsdichte um den Mittelwert konzentriert.


μ=0, Normalverteilung
σ = 0.5
σ = 1
σ = 2
f1x
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
-4
-2
0
2
4


Verteilungsfunktion
σ = 0.5
σ = 1
σ = 2
F1x
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
-4
-2
0
2
4

- Je höher die Standardabweichung, desto weniger aussagekräftig ist der Erwartungswert.

- Durch das Standardisieren erhält man eine Standardnormalverteilung $X \sim N(0;1)$.

  Auch ein Wahrscheinlichkeitsintervall einer Normalverteilung kann in ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsintervall einer Standardnormalverteilung überführt werden:

$$P(x_u \leq X \leq x_o) = P(x_u - \mu \leq X \leq x_o + \mu) = P\left(\frac{x_u - \mu}{\sigma} \leq X \leq \frac{x_o + \mu}{\sigma}\right) = P(z_u \leq Z \leq z_o)$$

und umgekehrt: $P(z_u \leq Z \leq z_o) = P\left(z_u \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq z_o\right) = P(\mu + z_u\sigma \leq X \leq \mu + z_o\sigma)$

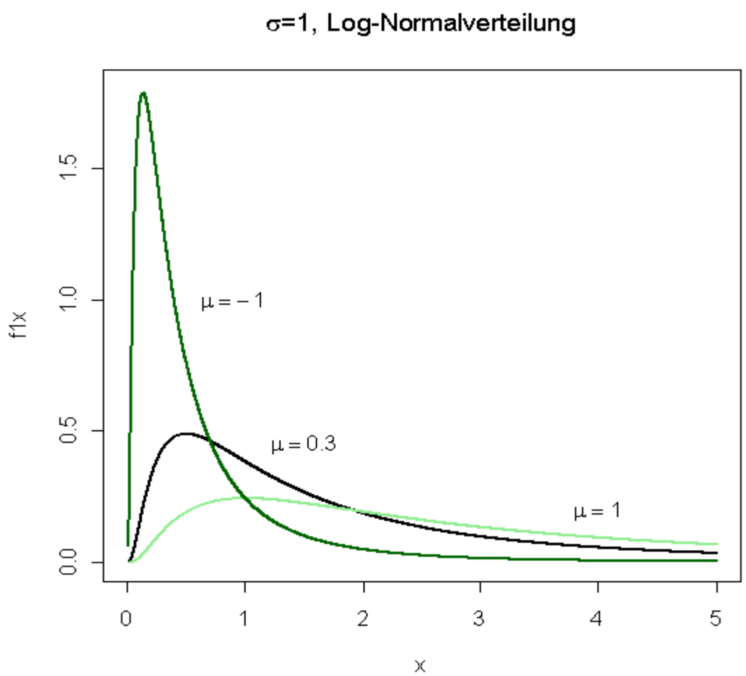
- Zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten von Intervallen benutzt man die Tabelle (Vertafelung) der Standardnormalverteilung, welche die jeweiligen Werte der Verteilungsfunktion für bestimmte *Z*-Werte angibt.

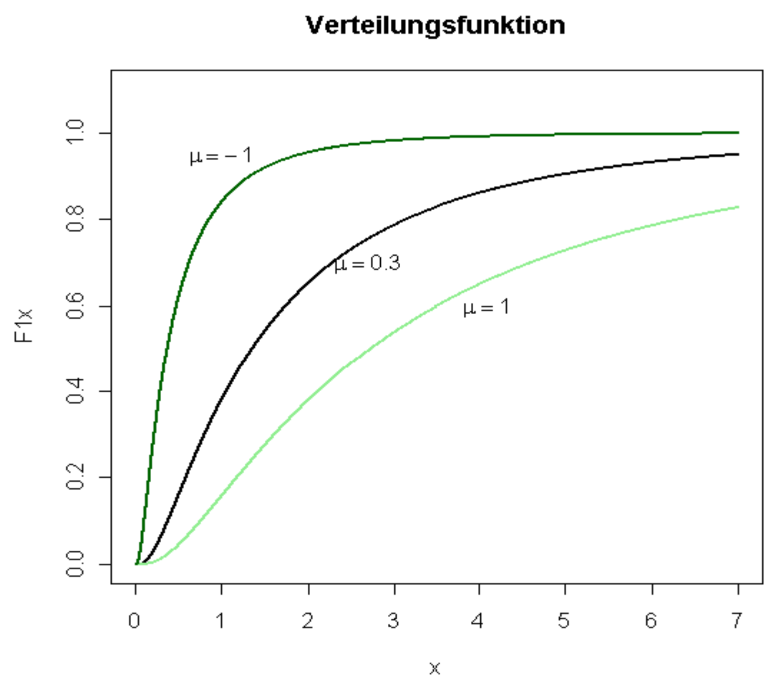
  Da die Normalverteilung symmetrisch ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass *Z* zwischen –*z* und 0 liegt, genauso hoch wie, dass sie zwischen 0 und +*z* liegt. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit grösser oder kleiner als der Erwartungswert zu sein gleich groß: $P(Z < 0) = P(Z > 0) = 0{,}5$.

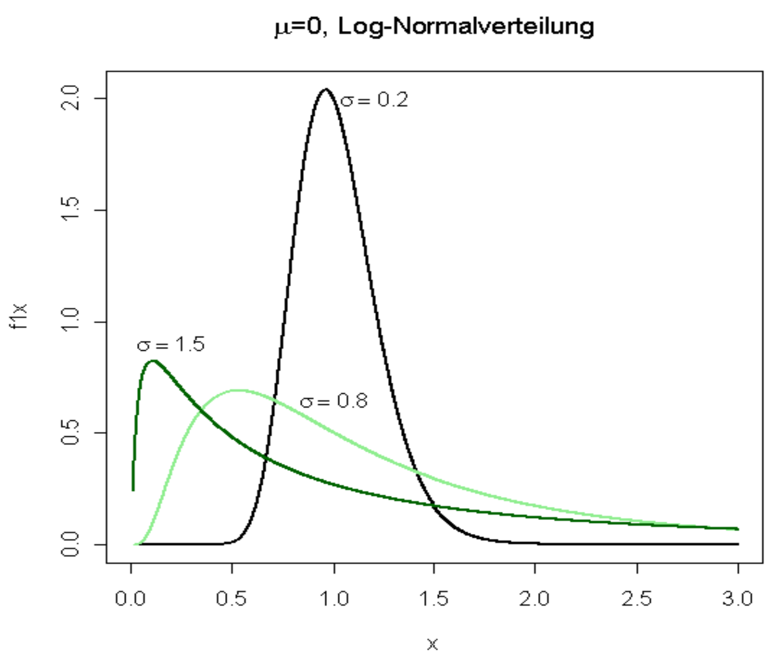
1.5 Log-Normalverteilung

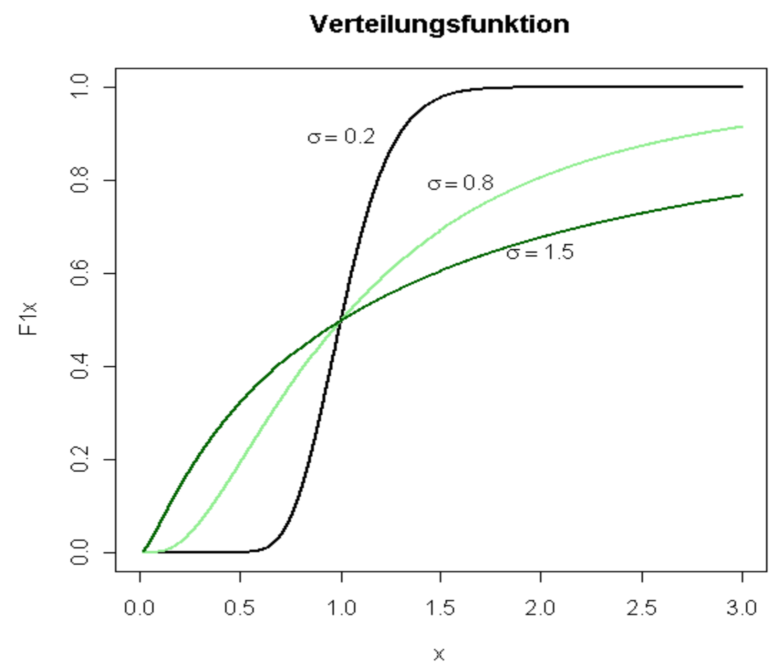
- Bei der Lognormalverteilung ist nicht die Variable X selbst, sondern ihr Logarithmus $Y = \ln x$ normalverteilt.

- Die Lognormalverteilung wird z.B. für die Darstellung der Einkommens-verteilung verwendet, da keine negativen Einkommen vorkommen können und einige wenige Einkommen sehr hoch sind, wodurch eine positive Schiefe entsteht.


σ=1, Log-Normalverteilung
f1x
x
μ = −1
μ = 0.3
μ = 1
0.0
0.5
1.0
1.5
0
1
2
3
4
5


Verteilungsfunktion
F1x
x
μ = −1
μ = 0.3
μ = 1
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
1
2
3
4
5
6
7





- Kompakt schreibt man auch $X \sim LN\left(\mu_L, \sigma_L^2\right)$. Es wird der Erwartungswert μ_L und die Varianz σ_L^2 der normalverteilten Zufallsvariable Y angegeben.

μ und σ^2 der lognormalverteilten Zufallsvariable X lassen sich berechnen als:

$$\mu = e^{\mu_L + \sigma_L^2/2} \text{ und } \sigma^2 = e^{2\mu_L + \sigma_L^2} \cdot \left(e^{\sigma_L^2} - 1\right)$$

Trotzdem können Wahrscheinlichkeitsintervalle der Lognormalverteilung berechnet werden, da $P(X \leq 2) = P(Y \leq \ln 2)$ ist und man durch standardisieren der normalverteilten Variable Y die Tabelle der Standardnormalverteilung benutzen kann.

1.6 Gammaverteilung

- Die Gammafunktion $\Gamma(x)=\int_{z=0}^{\infty} z^{x-1}e^{-z}dz$ kommt in vielen stetigen, für die Testtheorie wichtigen Verteilungen vor.

- Eine Eigenschaft dieser Funktion ist, dass $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$:

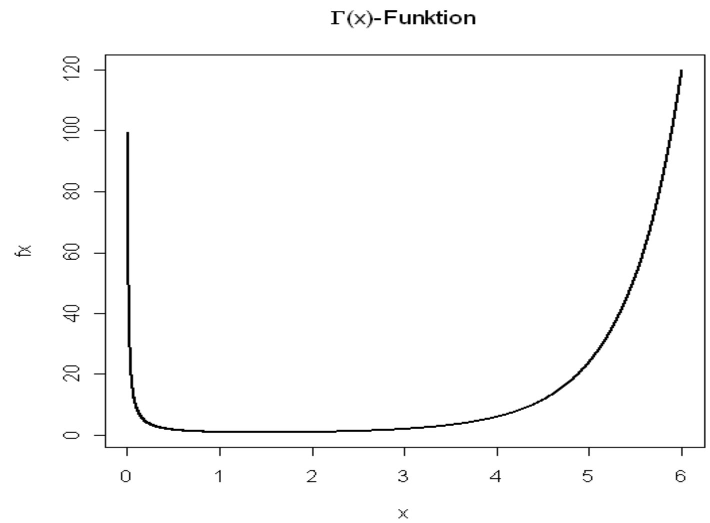
Für $\Gamma(1)=\int_{z=0}^{\infty} e^{-z}dz=\left[-e^{-z}\right]_0^{\infty}=1$

Für den allgemeinen Fall $\Gamma(x+1)$ gilt: $\Gamma(x+1)=\int\limits_{z=0}^{\infty} z^x e^{-z} dz$, was sich durch partielle Integration lösen lässt (allgemein: $\int u'vdx = uv - \int uv'dx$). Dabei setzt man z.B. $v = z^x; v' = x \cdot z^{x-1}; u' = e^{-z}; u = -e^{-z}$ und kann entsprechend $\Gamma(x+1)$ berechnen:

$$\Gamma(x+1) = \left[-e^{-z} \cdot z^x\right]_0^{\infty} - \int\limits_0^{\infty} -e^{-z} \cdot xz^{x-1} dz.$$

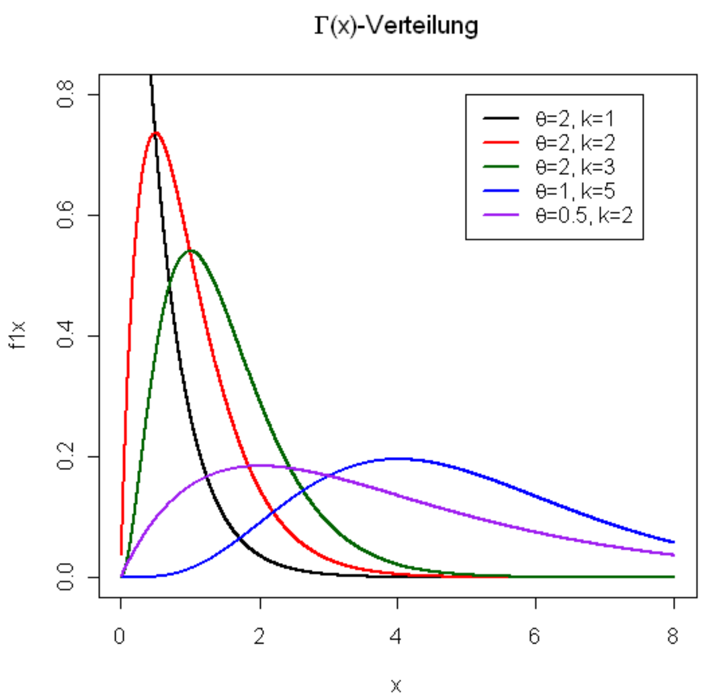
Der erste Term wird Null und der zweite Term ist $x\int\limits_0^{\infty} e^{-z} \cdot z^{x-1} dz$ (x als Konstante vor das Integral) was $x \cdot \Gamma(x)$ ist. Also ist $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

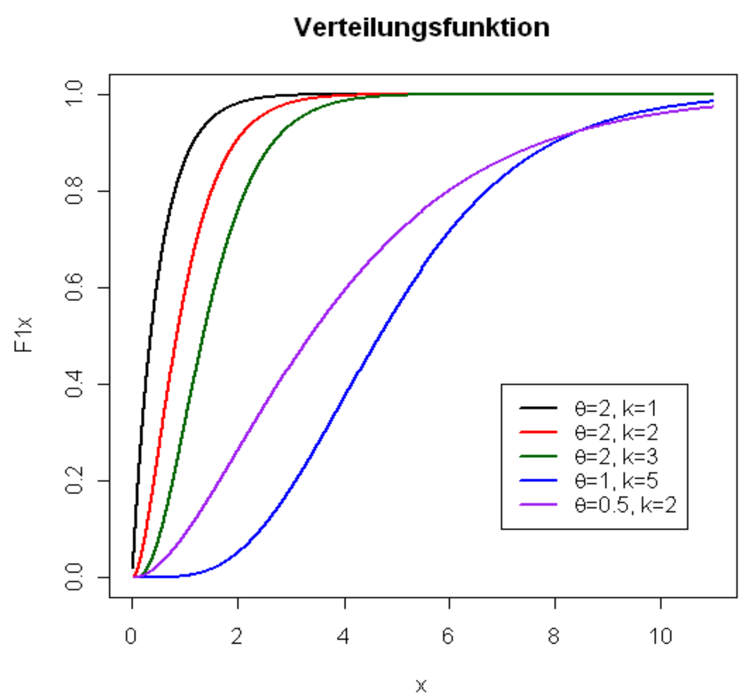
$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!$; $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 = 3!$ usw.



- Die Gammaverteilung ist eine Verallgemeinerung der Verteilungen aus der Testtheorie und enthält die Gammafunktion: $f(x,k,\theta) = x^{k.-1} \frac{e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}$

- Je grösser *k*, desto flacher ist die Verteilung und je grösser θ, desto asymmetrischer ist die Verteilung (großes θ = positive Schiefe)


Γ(x)-Verteilung
f1x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
2
4
6
8
x
θ=2, k=1
θ=2, k=2
θ=2, k=3
θ=1, k=5
θ=0.5, k=2


Verteilungsfunktion
F1x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
2
4
6
8
10
x
θ=2, k=1
θ=2, k=2
θ=2, k=3
θ=1, k=5
θ=0.5, k=2