

**Klausur auf dem Gebiet: STATISTIK II**Prüfer: Dr. Roland Füss

Name, Vorname: \_\_\_\_\_

Matrikel-Nr.: \_\_\_\_\_

Die Klausur enthält drei Typen von Aufgaben:

Der Teil A besteht aus einer Reihe von Fragen mit mehreren vorgegebenen Antwortvorschlägen, von denen nur jeweils eine Antwort richtig ist. Des Weiteren enthält dieser Teil mehrere Aufgaben mit einem Lückentext, der mit den fehlenden Antworten auszufüllen ist. Schreiben Sie den Kennbuchstaben der Antwort sowie die fehlenden Begriffe, die Sie für richtig halten, deutlich in das Kästchen am rechten Rand bzw. in die zur Verfügung stehenden Leerstellen. Für jede richtige Antwort bzw. Lückentext erhalten Sie einen Punkt.

Der Teil B enthält die ausführlich zu lösenden Aufgaben. Es müssen alle vier gestellten Aufgaben bearbeitet werden.

NUR MIT DER DARSTELLUNG DER EINZELNEN RECHENSCHRITTE KANN DIE VOLLE PUNKTZAHL ERREICHT WERDEN!

Damit die Klausur als ausreichend gilt, müssen 40 % der erreichbaren Punktzahlen sowohl in Teil A als auch der in Teil B gestellten Aufgaben erzielt werden, also in Teil A mindestens 12 Punkte, in Teil B mindestens 24 Punkte.

Zulässige Hilfsmittel: Einfacher Taschenrechner mit Grundrechenarten, Formelsammlung.

Punktzahlen:	A-Teil	Aufgaben B-Teil				Gesamtnote:
		A1	A2	A3	A4	

- 1) Ein Wirtschaftsforschungsinstitut sagt 75 von 100 wirtschaftlichen Kehrtwendungen richtig voraus. Das 90 % Konfidenzintervall beträgt demnach:
- A)  $[0,7321 ; 0,8125]$   
 B) Das Intervall ist aus den obigen Angaben nicht berechenbar.  
 C)  $[0,7001 ; 0,8284]$   
 D)  $[-1,96 ; +1,96]$   
 E)  $[0,7525 ; 0,7965]$   
 F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.
- 2) In einem Land fälschen 2 % aller Unternehmen ihren Jahresabschluß. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter 210 Unternehmen genau 9 mit gefälschtem Jahresabschluß sind?
- A) 0,9827  
 B) 0,4552  
 C) 0,2851  
 D) 0,0149  
 E) 0,0168  
 F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.
- 3) Das Eintreffen von Nachrichten in einem Email-Postfach ist zu jedem Zeitpunkt innerhalb 24 Stunden gleich wahrscheinlich. Welcher Anteil der Nachrichten kommt zwischen 8 Uhr und 12 Uhr morgens an?
- A) 0,1112  
 B) 0,5510  
 C)  $1/6$   
 D)  $1/9$   
 E)  $1/12$   
 F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.
- 4) Ist ein Schätzer  $\hat{\beta}$  erwartungstreu, so bedeutet dies, dass
- A)  $\hat{\beta} = \beta$ .  
 B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta} = \beta$ .  
 C)  $\beta$  ist annähernd normalverteilt.  
 D)  $E(\hat{\beta}) = \beta$ .  
 E)  $\beta$  ist konsistent.  
 F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

- 5) Die Militärausgaben sind weltweit log-normalverteilt mit  $\mu_L = 0,8$ ,  $\sigma_L = 1,2$ ,  $\mu = 4,57$  und  $\sigma = 3,129$  (alle Werte in Mrd. EUR). Die Wahrscheinlichkeit, dass die Militärausgaben kleiner als 4 sind, beträgt
- A) 0,3610.  
 B)  $P(\ln[\text{Militärausgaben}] < 2,58)$ .  
 C)  $P\left(Z < \frac{1,39 - 0,8}{1,2}\right)$ .  
 D)  $P\left(x < \frac{4 - 0,8}{1,2}\right)$ .  
 E)  $P\left(Z < \frac{4 - 4,57}{3,129}\right)$ .  
 F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.
- 6) Der Korrelationskoeffizient zwischen zwei Zufallsvariablen  $x$  und  $y$  beträgt  $\rho(x, y) = 0,6$ ,  $\sigma_x^2 = 24$  und  $\sigma_y^2 = 16$ . Die Kovarianz zwischen  $x$  und  $y$  beträgt demnach:
- A) 230,4.  
 B) aus den obigen Angaben nicht berechenbar.  
 C) 33,82.  
 D) 24,337.  
 E) 11,76.  
 F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.
- 7) Beim  $t$ -Test eines Korrelationskoeffizienten gehen 2 Freiheitsgrade verloren, da
- A) im Nenner  $\sqrt{1 - r^2}$  berechnet wird.  
 B) es sich um eine Schätzung des unbekanntes  $\rho$  in der Grundgesamtheit handelt.  
 C) drei Parameter berechnet werden müssen.  
 D) man im Zähler eine Zufallsvariable hat.  
 E) zwei Stichprobenmittelwerte berechnet werden.  
 F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.
- 8) Die Wahrscheinlichkeit im A-Teil durch Zufall richtig zu liegen beträgt 0,166. Die Wahrscheinlichkeit, nach mehr als zwei falsch beantworteten Fragen erstmals wieder richtig zu liegen beträgt dann:
- A) 0,6944  
 B) 0,3044  
 C) 0,9210  
 D) 0,5625  
 E) 0,3658  
 F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

- 9) In einer Regression, bei der das Einkommen in Abhängigkeit von der Ausbildungszeit geschätzt wird, wird im  $t$ -Test für den Parameter  $\hat{\beta}$  die Nullhypothese auf dem 1 %-Signifikanzniveau abgelehnt. Das bedeutet:
- A) mit 95 % Wahrscheinlichkeit hat Ausbildung einen signifikanten Einfluss auf das Einkommen (zweiseitig).
  - B)  $\hat{\beta}$  ist 0.
  - C)  $\hat{\beta}$  ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % gleich 0.
  - D) mit 99 % Wahrscheinlichkeit hat Ausbildung einen signifikanten Einfluss auf das Einkommen.
  - E) mit 98 % Wahrscheinlichkeit hat Einkommen einen signifikanten Einfluss auf die Ausbildung.
  - F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

- 10) Die folgende Tabelle zeigt die Aufteilung von Studenten auf 3 Studiengänge (Ereignis  $A_i$ ). Des Weiteren ist der Anteil der Studenten gegeben, der die Statistik Klausur mitschreibt (Ereignis  $B|A_i$ ):

Studiengang	Ereignis	Anteil der Studenten	Ereignis	Anteil der Studenten, welche die Statistik Klausur mitschreiben
Diplom	$A_1$	0,89	$B A_1$	0,80
Master	$A_2$	0,09	$B A_2$	0,00
Nebenfach	$A_3$	0,02	$B A_3$	0,21

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Student, welcher die Statistik Klausur mitschreibt, unter die Kategorie Nebenfach fällt, beträgt demnach:

- A) 0,7162
- B) 0,0253
- C) 0,8102
- D) 0,0297
- E) 0,0059
- F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

- 11) Eine stetige Zufallsvariable hat die Dichtefunktion  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}, & 0 \leq x < 12 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ . Die

Wahrscheinlichkeit  $P(x = 5)$  beträgt dann:

- A) 0,0698
- B) 0,3022
- C) 0,0001
- D) 0,0000
- E) 0,1557
- F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

- 12) Gegeben sei die Zufallsvariable  $Y = 1/2 + 4X$  und die Varianz von  $X$ ,  $\sigma_X^2 = 7,5$ . Die Varianz von  $Y$ ,  $\sigma_Y^2$ , beträgt folglich
- A) 0.
  - B) 120.
  - C) 30.
  - D) ist aus den obigen Angaben nicht berechenbar.
  - E) 24.
  - F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

- 13) Der Wert, bei dem  $\int_{\frac{1}{4}}^{x_{\text{Med}}} \frac{1}{4} x^{-2} dx = \frac{1}{2}$ , also dem Median entspricht, beträgt bei den

Grenzen  $x \geq 1/4$ :

- A) 1/4
- B) 1/2
- C) 1/3
- D) 1/6
- E) 5/12
- F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

- 14) Bei einem  $p$ -Wert von 0,03 wird die Nullhypothese

- A) zum 1 % Signifikanzniveau abgelehnt.
- B) zum 10 % Signifikanzniveau abgelehnt.
- C) zum 2 % Signifikanzniveau abgelehnt.
- D) zum 7 % Signifikanzniveau angenommen.
- E) zum 10 % Signifikanzniveau angenommen.
- F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

- 15) Für eine Schätzung des Mittelwertes in der Grundgesamtheit soll der Stichprobenumfang so gering wie möglich gehalten werden. Die Standardabweichung der Grundgesamtheit beträgt 8 und das zweiseitige Konfidenzintervall soll 98 % betragen. Die Punktschätzung soll  $\pm 0,5$  genau sein. Der notwendige Stichprobenumfang beträgt dann mindestens

- A) 987
- B) 1235
- C) 28
- D) 64
- E) 1390
- F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

16) Die Breite eines Konfidenzintervalls hängt vom gewählten Signifikanzniveau und dem Stichprobenumfang ab. Welche der folgenden Aussagen ist richtig:

- A) bei gegebenem Signifikanzniveau führt ein höherer Stichprobenumfang zu einer Vergrößerung des Konfidenzintervalls.  
 B) bei gegebenem Stichprobenumfang führt ein höheres Signifikanzniveau zu einer Verkleinerung des Konfidenzintervalls.  
 C) bei gegebenem Signifikanzniveau führt ein kleinerer Stichprobenumfang zu einer Verkleinerung des Konfidenzintervalls.  
 D) bei gegebenem Stichprobenumfang führt ein niedrigeres Signifikanzniveau zu einer Verkleinerung des Konfidenzintervalls.  
 E) bei gegebenem Stichprobenumfang führt ein niedrigeres Konfidenzniveau zu einer Vergrößerung des Konfidenzintervalls.  
 F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

17) Für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable  $W$  beträgt die Wahrscheinlichkeit im Intervall  $-2,6 \leq W \leq -0,8$

- A) 0,9953  
 B) 0,7881  
 C) 0,2072  
 D) 0,3557  
 E) 0,5172  
 F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

18) In einer Lostrommel befinden sich 800 Lose von denen 325 Gewinne sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, 6 Anläufe zu brauchen, um den dritten Gewinn zu erzielen?

- A) 0,140  
 B) 0,625  
 C) 0,208  
 D) 0,095  
 E) 0,128  
 F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

19) Für welchen Wert von  $a$  wird folgende Funktion eine Dichtefunktion?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 & , 0 \leq x < a \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

- A) 0,0014  
 B) 2  
 C) 2,08  
 D) 9  
 E) 5,61  
 F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

20) Die Wahrscheinlichkeit im Sommer eine negative Wasserbilanz zu haben, beträgt 0,8. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst im dritten Sommer eine negative Wasserbilanz auftritt?

- A) 0,025  
 B) 0,004  
 C) 0,081  
 D) 0,032  
 E) 0,115  
 F) Die Antworten A) bis E) sind falsch.

21) Der Erwartungswert der Dichtefunktion:  $f(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\eta} e^{-\lambda\eta} & , 0 \leq \eta < \infty \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$  beträgt

\_\_\_\_\_.

22) Der Erwartungswert aus Aufgabe 21 ist demnach der Erwartungswert der \_\_\_\_\_ Verteilung.

23) Eine Verteilungsfunktion  $F(x)$  konvergiert zur linken Seite gegen  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  und zur rechten Seite gegen \_\_\_\_\_.

24) Nach dem Zentralen Grenzwertsatz verhält sich der Stichprobenmittelwert bei zunehmendem Stichprobenumfang  $n$  folgendermaßen: \_\_\_\_\_.

25) Das schwache Gesetz der großen Zahlen besagt, dass ein Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  mit zunehmendem Stichprobenumfang  $n$  und einer beliebig kleinen Zahl  $\varepsilon$  folgende Beziehung hat: \_\_\_\_\_.

26) Bei unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit liegt der Erwartungswert der Grundgesamtheit  $\mu$  bei einem geringen Stichprobenumfang mit Zurücklegen mit 97,5 % Wahrscheinlichkeit in folgendem Intervall:

$$P( \text{_____} \leq \mu \leq \text{_____} ) = 0,975 .$$

- 27) In einer Urne befinden sich 20 rote Kugeln und 12 grüne Kugeln. 5 der roten Kugeln und 3 der grünen Kugeln sind zusätzlich mit einer 1 beschriftet. Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel oder eine beschriftete Kugel zu ziehen beträgt dann \_\_\_\_\_.
- 28) Die Wahrscheinlichkeit aus der Urne aus Aufgabe 27 eine Grüne oder keine beschriftete Kugel zu ziehen beträgt hingegen \_\_\_\_\_.
- 29) Die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese anzunehmen, obwohl sie falsch ist, bezeichnet man als \_\_\_\_\_.
- 30) Die Wahrscheinlichkeit aus Aufgabe 29 verringert sich, wenn man das Signifikanzniveau \_\_\_\_\_.

**Aufgabe 1 (15 Punkte)**

Ein Behälter I enthält 3 rote Chips und 7 blaue Chips, ein weiterer Behälter II enthält 6 rote Chips und vier blaue Chips. Zufällig wird nun ein Behälter ausgewählt und anschließend 1 Chip aus diesem Behälter gezogen.

- a. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass der Chip rot ist. (2 P.)
- b. Unter der Hypothese, dass der Chip rot ist, finden Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der Chip aus dem Behälter II gezogen wurde. (2 P.)
- c. Erklären Sie kurz den Unterschied zwischen A-priori- und A-posteriori-Wahrscheinlichkeit? (2 P.)

Es ist die folgende zweidimensionale Dichtefunktion gegeben:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 21x_1^2 x_2^3 & 0 < x_1 < x_2, \quad x_1 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- d. Finden Sie  $E(X_1|X_2)$  und  $Var(X_1|X_2)$ . Sie benötigen hierzu  $f(x_1|x_2)$ ,  $f(x_2)$  und  $E(X_1^2|X_2)$ . (5 P.)
- e. Die momentenerzeugende Funktion einer Zufallsvariable  $X$  ist  $M_x(t) = \exp(4(e^t - 1))$ . Zeigen Sie, dass  $P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = 0,931$ , wobei  $X$  einer Poissonverteilung folgt, d.h.  $X \sim Poi(\lambda = 4)$ . Die kumulative Verteilungsfunktion der Poissonverteilung ist wie folgt tabelliert: (4 P.)

x	$\mu$				
	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025
1	0,4060	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174
2	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620
3	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512
4	0,9473	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851
5	0,9834	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457
6	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063
7	0,9989	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440
8	0,9998	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472

**Aufgabe 2 (15 Punkte)**

In dem großen Bundesland Nordrhein-Westfalen soll das durchschnittliche monatliche Haushaltseinkommen mit Hilfe einer einfachen Zufallsstichprobe geschätzt werden. Aus anderen Untersuchungen ist bekannt, dass die Standardabweichung der Einkommen höchstens 1500 € beträgt.

- a. Wie groß muss die Stichprobe gewählt werden, um das mittlere Haushaltseinkommen bei einem Konfidenzniveau von 95 % auf 100 € genau zu schätzen? (2 P.)
- b. In einer Zufallsstichprobe von 1000 Haushalten ergibt sich ein Durchschnittseinkommen von 3280 € bei einer Standardabweichung von 1130 €. Berechnen Sie das 95 %-Konfidenzintervall für das durchschnittliche Haushaltseinkommen. (2 P.)
- c. Erklären Sie verbal, was das Konfidenzintervall hier bedeutet. (1 P.)

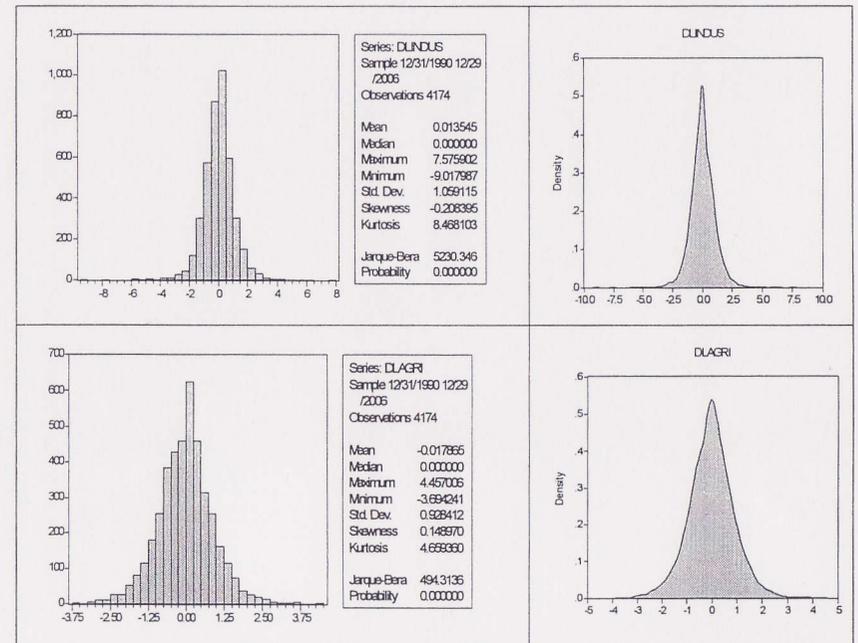
Im Rahmen der Klausur in Statistik II, an der 400 Studenten teilnehmen, ist die erreichte Punktzahl erfahrungsgemäß näherungsweise normalverteilt. Unmittelbar nach der Klausur werden 10 Klausuren zufällig ausgewählt und ausgewertet. Dabei ergeben sich (von insgesamt 90 Punkten) folgende Punktzahlen: 66, 38, 73, 64, 85, 58, 32, 42, 77, 45

- d. Geben Sie eine erwartungstreue Punktschätzung für den Mittelwert  $\mu$  und die Varianz  $s^2$  der von allen 400 Studenten erreichten Punktzahlen. (3 P.)
- e. Berechnen Sie ein 95 %-Konfidenzintervall für die mittlere Punktzahl der Studenten. (4 P.)
- f. Erläutern Sie, warum die Varianz von  $\bar{X}$  bei steigendem Stichprobenumfang  $n$  im Fall ohne Zurücklegen gegen Null geht? (3 P.)

**Aufgabe 3 (15 Punkte)**

Das unten stehende Schaubild zeigt die täglichen Renditen (in %) des Rohstoffindex Industriemetalle (oben) und des Indexes für landwirtschaftliche Produkte (unten) von 1991 bis Ende 2006 (4174 Beobachtungen).

- a. Berechnen und vergleichen Sie die jährlichen Mittelwerte und Volatilitäten beider Indizes. (2 P.)
- b. Beurteilen Sie die Attraktivität beider Investments hinsichtlich der höheren Momente (Schiefe und Kurtosis). (2 P.)
- c. Obwohl die durchschnittliche Rendite des Agrikultur Indexes in den letzten 15 Jahren negativ war, investiert ein Investor mit einer optimistischen Einstellung in diesen Index. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Investor eine jährliche Rendite zwischen 0 % und 3 % realisieren können unter der Annahmen, dass sich die Verteilung in nächster Zeit nicht verändert (nehmen Sie als Annäherung eine Normalverteilung an). (4 P.)
- d. Welcher Verlust wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nicht überschritten? (d.h. die Rendite wird nicht noch negativer). (4 P.)
- e. Zeigen Sie anhand der momentenerzeugenden Funktion, dass der Erwartungswert bzw. die Varianz der standardnormalverteilten Zufallsvariable  $Z$  gleich 0 bzw. 1 ist. (3 P.)



**Aufgabe 4 (15 Punkte)**

Gegeben sei folgender Excel Ausdruck. Die Variable  $y$  ist die Wachstumsrate neuer Wohnungen in den USA zwischen 1986 Q3 und 2006 Q4 ( $n = 81$  Quartale) und die Variable  $x$  ist der Hypothekenzins. Überprüft werden soll der Einfluss des Hypothekenzinses auf das Wachstum neuer Wohnungen.

- a. Berechnen Sie die Parameter  $\beta_0$  und  $\beta_1$  und zeichnen Sie die Regressionsgerade in das Punktdiagramm ein. (6 P.)
- b. Stimmen die Vorzeichen mit ihren theoretischen Überlegungen überein? (2 P.)
- c. Berechnen und interpretieren Sie das Bestimmtheitsmaß  $R^2$ . (2 P.)
- d. Testen sie, ob der Parameter  $\beta_1$  signifikant von 0 verschieden ist (Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$ ) (5 P.)

	D	E	F	G	H	I	J	K	L
83	6,45	-12,52887593	0,2673489	6,706972773	156,5465	0,741288	176,0972		
84	<b>Mittelwert max</b>	<b>Mittelwert moy</b>	<b>Varianz(x)</b>	<b>Kovarianz(x,y)</b>	<b>Varianz(y)</b>				
85	6,986049383	-0,017019763	1,7659727	-2,498185056	31,84176				

Summe quadrierter Residuen  
2349,546

| 4 |